Dossier de candidature de Christophe Chorro

pour le poste MCF n°

Table des matières :

Mots-Clés : Formes de Dirichlet, opérateur carré du champ, domaine vectoriel, théorie des erreurs, information de Fisher, théorèmes limites, calcul de Malliavin.

- Les documents mentionnés dans ce dossier (thèse, articles, pré-publications) sont disponibles en ligne à l'adresse suivante: http://chorro.ouvaton.org
- Suivant les instructions du journal officiel daté du 8 Mars 2006, les lettres de recommandation n'ont pas été jointes au dossier mais sont disponibles sur simple demande.

CHRISTOPHE CHORRO

CERMSEM CNRS-UMR 8095
Université Paris 1 - Maison des Sciences Économiques
106-112 Bd de l'Hôpital, 75647 Paris cedex 13
christophe.chorro@gmail.com

Né le 3 Mai 1977
Nationalité Française
25 Rue Melingue
75 019 Paris
Tel: 0616452571

Situation :

2005-2006 Attaché temporaire d'enseignement et de recherche, Université Paris 1.

2002-2005 Allocataire de recherche et Moniteur au CERMSEM, Université Paris 1.

2002-2005 Thèse de doctorat sous la direction du professeur Nicolas Bouleau au CERMSEM, Université Paris 1.

Formation :

2002-2005 Doctorat de Mathématiques appliquées soutenu publiquement le 9/12/2005 à l'Université Paris 1.
Titre: "Calcul d'erreur par formes de Dirichlet: Liens avec l'information de Fisher et les théorèmes limites."
Président: Michel Émery.
Directeur: Nicolas Bouleau.
Rapporteurs: Laurent Denis, Nicolas Privault.
Examinateurs: Marco Biroli, Denis Feyel.
Mention: Très Honorable.

2001-2002 DEA MMME (Modélisation et Modèles Mathématiques en Économie), option Probabilités et Finance, à l'Université Paris 1 (Rang: 1er, Mention T.Bien).

2001 Admis à l'Agrégation de Mathématiques, option Modélisation et Probabilités (Rang: 150ème).

1998-2002 Magistère de Mathématiques pures à l'Université Paris Sud d'Orsay.

1995-1998 Classes Préparatoires aux Grandes Écoles au lycée Joffre à Montpellier (MPSI, MP).

Langues :

Anglais Lu, écrit, parlé.

Espagnol Notions.

ENSEIGNEMENTS

Les enseignements suivants ont été principalement dispensés en tant que moniteur ou ATER dans l'UFR 27 (Mathématiques et Informatique) de l'Université Paris 1 avec une intervention (Cours de théorie des options) dans l'UFR 06 (Gestion et économie d'entreprise). L'application des outils probabilistes à la finance a complété des thèmes plus généralistes (algèbre linéaire, topologie,...). Nous en donnons le détail ci dessous:

Enseignements en Anglais :

Les enseignements suivants, d'un niveau Licence-Maîtrise, ont été réalisés dans le cadre du nouveau diplôme réservé aux étudiants étrangers "Graduate studies, Mathematical Models in Economics and Finance" de l'Université Paris 1.

2005-2006 Chargé de Travaux Dirigés en *Probabilités* (2h pendant 10 semaines).

1. *Introduction*
2. *Axioms of probability*
3. *Conditional probability and independence*
4. *Probability on a finite space*
5. *Random variables on a finite space*
6. *Construction of a probability measure on* $\mathbb{R}$
7. *Random variables*
8. *Integration with respect to a probability measure*
9. *Independent random variables*
10. *Probability distributions on* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{R}^n$
11. *Characteristic functions : Definitions and properties*
12. *Sums of independent random variables*
13. *Gaussian random variables*
14. *Convergence of random variables*
15. *Weak convergence and characteristic functions*
16. *The law of large numbers*
17. *The central limit theorem*

2005-2006 Tutorat de *Mathématiques* (2h pendant 10 semaines)

2004-2005 Chargé de Travaux Dirigés en *Probabilités* (2h pendant 5 semaines).

1. *Théorie des martingales discrètes*
2. *Inégalités de Doob*
3. *Théorème d'arrêt*
4. *Critères de convergence*

Enseignements en Français :

Cours magistraux:

2005-2006 Chargé du cours *"Théorie des options"* dans le cadre de la deuxième année du Master professionnel d'ingénierie financière et fiscale de l'Université Paris 1 (1h30 pendant 7 semaines).

Le but de ce cours est de permettre l'obtention de la célèbre formule de Black-Scholes sans l'utilisation des techniques du calcul stochastique.

1. Introduction : Les différents marchés financiers, les intervenants, exemples.
2. Les produits dérivés : Options (couverture, différents payoffs), motivations des intervenants.
3. Outils pour l'évaluation : Taux d'intérêts, raisonnement financier d'absence d'opportunité d'arbitrage, parité Call-Put.
4. Modélisation des marchés financiers : Approche probabiliste, portefeuille auto-financé, absence d'opportunité d'arbitrage, marché complet, réplication.
5. Modèle de Cox-Ross-Rubinstein. Passage au continu. Évaluation d'un call européen. Formule de Black et Scholes.

2005-2006 Chargé du mini-cours *"Introduction au calcul de Malliavin"* dans le cadre de la deuxième année du Master Mathématiques, Informatique et Applications (option MMMEF) de l'Université Paris 1 (2h pendant 5 semaines).

Le but de ce cours est de familiariser les étudiants aux techniques élémentaires du calcul de variations stochastique (ou calcul de Malliavin) sur l'espace de Wiener avec un intérêt particulier pour les applications récentes en finance mathématiques dans les problèmes de sensibilité. Le plan est le suivant:

1. Rappels de théorie des probabilités et motivations: Intégrale d'Itô, théorème de représentation des martingales browniennes, intérêt des formules d'intégration par parties en probabilités pour l'étude de la régularité des lois et de la sensibilité.
2. Opérateur de dérivation: Cas des fonctions élémentaires, premières formules d'intégration par parties, fermabilité de l'opérateur de dérivation, chain rule, opérateur de dérivation et espérance conditionnelle.
3. L'intégrale de Skorohod: Définition, lien avec l'intégrale d'Itô pour les processus adaptés, règles de calcul.
4. Formule de Clark-Ocone et application au problème de la couverture des options lorsque le prix d'un actif est donné par la solution d'une équation différentielle stochastique régulière.
5. Calcul des grecques par simulation Monte-Carlo: Étude directe dans le cadre du modèle de Black-Scholes, utilisation du calcul de Malliavin pour le cas général via la formule d'intégration par parties sur l'espace de Wiener.

Travaux dirigés:

2005-2006 Chargé de Travaux Dirigés de *Marchés Financiers* en Licence MASS (L3) (1h30 pendant 12 semaines).

1. Description des produits financiers: actions, obligations, produits sur les taux, produit à terme, produit au comptant, produits dérivés, relation avec les produits physiques: pétrole et gaz.
2. Description du fonctionnement des marchés, sécurité, règles de fonctionnement.
3. Stratégies élémentaires de couverture et relations entre prix au comptant et prix à terme.

2002-2006 Chargé de Travaux Dirigés du module *Algèbre 3* en deuxième année de Deug MASS (L2) (2H30 pendant 12 semaines).

1. Généralités et Rappels: Espaces vectoriels, bases, applications linéaires, matrices, déterminants.
2. Dualité: Formes linéaires, espace dual, orthogonalité, adjoint, application linéaire duale, théorème du rang.
3. Polynômes: Polynôme à une indéterminée, degré d'un polynôme, division Euclidienne des polynômes, fonction polynôme, racines simples et multiples, caractérisation des racines, théorème de d'Alembert-Gauss (sans démonstration).
4. Réduction des endomorphismes: Valeur propre, vecteur propre, polynôme caractéristique, théorème de Cayley Hamilton, polynôme minimal, théorème de Dirac, diagonalisation des endomorphismes, caractérisations, sous-espaces caractéristiques, sous-espaces caractéristiques généralisés et réduites de Jordan, trigonalisation des endomorphismes, caractérisations, applications aux systèmes récurrents et au calcul de puissances.

2002-2005 Chargé de Travaux Dirigés de *Topologie* en Licence MASS (L3) (3h pendant 12 semaines).

1. Rappels sur la topologie de $\mathbb{R}^n$. Espaces métriques. Applications continues, homéomorphismes, exemples. Topologies produit et quotient. Espaces compacts. Espaces métriques complets. Exemples : applications bornées dans un espace complet, applications continues bornées dans un espace complet. Complété d'un espace métrique. Théorème d'Ascoli. Théorème du point fixe de Picart-Banach. Connexité.
2. Espaces vectoriels normés. Propriétés des espaces vectoriels normés de dimension finie. Applications linéaires continues. Espaces normés des applications linéaires continues. Dual topologique. Série dans les espaces vectoriels normés. Théorème de Hahn-Banach et application au dual. Notion sur les espaces de Banach. Exemple des espaces L^p.
3. Espaces de Hilbert, théorème de projection sur les convexes, application au dual d'un espace de Hilbert. Bases hilbertiennes.

Colles:

2000-2002 Colleur en CPGE économique et commerciale à l'institut IPECOM de Paris (5h par semaines).

<u>Vacations</u>:

2001-2002 Vacataire <u>*d'Algèbre et d'Analyse*</u> en 1ère année de Deug MASS (L1) à l'Université Paris 1 (2×2h pendant 12 semaines).

1. Déterminants. Forme multilinéaire, forme n-linéaire alternée. Déterminant d'un système de vecteurs. Déterminant d'une matrice et de sa transposée. Calcul des déterminants, cofacteurs, développement d'un déterminant par rapport aux lignes et colonnes ; caractérisation des matrices inversibles. Déterminant d'un endomorphisme. Application des déterminants à l'étude du rang. Résolution d'un système par la méthode des déterminants.
2. Formules de Taylor. Dérivées successives. Fonction de classe C^p sur un intervalle. Formule de Leibniz. Formule de Taylor-Young, Taylor-Lagrange, Taylor avec reste intégral.
3. Développements limités, développement limité d'ordre n au voisinage de 0, au voisinage d'un point quelconque, au voisinage de l'infini. Existence d'un développement limité d'ordre n pour une fonction n fois dérivable. Développements limités des fonctions usuelles. Opérations sur les développements limités. Application des développements limités à l'étude locale et asymptotique des fonctions.
4. Calcul intégral. Fonctions en escalier. Intégrale des fonctions en escalier et propriétés. Fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle borné. Caractérisation des fonctions intégrables. Propriétés générales de l'intégrale. Intégrabilité des fonctions monotones et des fonctions continues. Primitive d'une fonction. Calcul de primitives usuelles. Calcul approché d'intégrales, exemple de méthodes (rectangles, trapèzes, Simpson...). Intégration par parties et par changement de variable.
5. Equations Différentielles. Notion d'équation différentielle ordinaire en dimension 1. Notion de solution. Problème de Cauchy. Intégration d'équations usuelles.
6. Introduction aux fonctions de deux variables. Norme. Normes équivalentes, distance associée à une norme. Lignes et ensembles de niveau d'une fonction. Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Exemples. Continuité des applications linéaires et des normes. Différentiabilité des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Dérivées partielles. Conditions suffisantes de continuité. Conditions suffisantes de différentiabilité. Dérivées partielles secondes. Gradient d'une fonction. Conditions nécessaires d'optimalité. Théorèmes concernant la différentiabilité des fonctions composées de la forme $j(x) = F(f(x), g(x))$ et de la forme $F(u(x, y), v(x, y))$.

Matériel Pédagogique :

Nov. 2005 Élaboration d'un polycopié de cours (80 pages): "Options, Produits dérivés: Une approche mathématique" en collaboration avec Alexandre Marino. Ce polycopié a servi de support au cours de "Théorie des options" dans le cadre de la deuxième année du Master d'ingénierie financière de l'Université Paris 1.

RECHERCHE

Publications :

Juin 2005 C. Chorro : *Convergence in Dirichlet law of certain stochastic integrals*, Electron. J. Probab. 10, 1005-1025, 2005.

Pré-Publications :

Juil. 2004 N. Bouleau, C. Chorro : *Error structures and parameter estimation*, Cahiers de la MSE, 2004.79, 19 pages, Univ. Paris 1, 2004. (soumis pour publication à Potential Analysis)

Juil. 2004 C. Chorro : *On an extension of the central limit theorem to Dirichlet forms*, Cahiers de la MSE, 2004.80, 16 pages, Univ. Paris 1, 2004. (soumis pour publication à Osaka Journal of Mathematics)

Notes CRAS :

Fév. 2004 N. Bouleau, C. Chorro : *Error structures and parameter estimation*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338, 305-310, 2004.

En préparation:

2006 C. Chorro : *Séries approximantes du mouvement Brownien et formes de Dirichlet.*

Cet article reprend les résultats, obtenus dans le chapitre 2 de la thèse, concernant la convergence, au sens des formes de Dirichlet, de certaines séries de Fourier aléatoires gaussiennes.

Communications orales :

*E*rror structures and parameter estimation

2004 XIIth Groupe MODE (Mathématiques de l'Optimisation et de la Décision) de la SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles), Le Havre, France. (25-27 Mars)

2003 Séminaire du CERMICS, École Nationale des Ponts et Chaussées. (11 Juin)

2003 Séminaire des doctorants du CERMSEM, Université Paris 1. (12 Mai)

*T*héorèmes limites et formes de Dirichlet

2004 Colloque "Modélisation en Finance" organisé par l'Université Paris 1. (26 Novembre)

*O*n an extension of the hilbertian central limit theorem to Dirichlet forms

2004	Séminaire de l'Université d'Osaka, Japon. (13 Novembre)
2004	Colloque "Stochastic models, integration of correspondences and applications" organisé par l'Université Paris 1. (12-14 Février)

Donsker theorem and Dirichlet forms

2005	Journées de Probabilités, Nancy. (5 Septembre)
2005	Séminaire de l'UESB, Barcelone. (8 Juin)
2005	Séminaire de l'Université d'Évry. (12 Mai)

Calcul d'erreur par formes de Dirichlet: quelques résultats asymptotiques

2006	Séminaire de l'Université de Marne la Vallée. (31 Mars)

Séjours scientifiques :

2004	Invité du 06/06/05 au 10/06/05 à l'Université UESB de Barcelone par le Professeur David Nualart.
2004	Invité du 01/11/04 au 15/11/04 à l'Université d'Osaka au Japon par le Professeur Hiroshi Sugita.

Références :

Professeur NICOLAS BOULEAU
Ecole Nationale des Ponts et Chaussées,
bouleau@mail.enpc.fr

Professeur LAURENT DENIS
Laboratoire d'Analyse et de Probabilité, Université d'Évry,
laurent.denis@univ-evry.fr

Professeur NICOLAS PRIVAULT
Département de Mathématiques, Université de La Rochelle,
nicolas.privault@univ-lr.fr

DESCRIPTION DES RÉSULTATS OBTENUS

Problématique et cadre de travail

Considérons un modèle physique, économique ou financier dépendant de plusieurs paramètres observables (volatilité dans le modèle financier de Black-Scholes, débit d'un fleuve, nature du sol et topographie des berges dans un modèle de crue). Contrairement aux grandeurs entières, les paramètres continus sont inévitablement entachés d'une erreur due à l'imprécision de l'appareil de mesure, aux techniques d'arron-dis ou tout simplement à l'entrée de l'expérimentateur dans le champ de l'expérience. Ces modèles sont de plus utilisés pour calculer des quantités significatives qui serviront comme aide à la prise de décision. Par exemple, dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on peut calculer la composition d'un portefeuille assurant la couverture d'une option et se positionner ensuite sur le marché. L'erreur associée à l'observation d'un paramètre va alors se propager à travers les calculs.

Le choix d'un langage pertinent pour traiter des erreurs et de leur propagation est un sujet ancien qui a mobilisé de nombreux mathématiciens dès le début du 19ème siècle. La difficulté du problème est qu'il est soumis à une double contrainte. Un tel langage doit être suffisamment précis et rigoureux pour être significatif et suffisamment souple pour s'adapter aux nombreuses situations. En effet, l'étude d'un phénomène physique donne souvent lieu à de multiples approches basées sur des partis pris et des outils mathématiques très différents. Il est alors très important qu'un langage commun puisse confronter et critiquer les différents points de vue.

Récemment, Nicolas Bouleau a proposé une approche originale basée sur la puissante théorie mathématique des formes de Dirichlet [1]. En effet, les principaux opérateurs utilisés en théorie du potentiel (opérateur carré du champ, générateur infinitésimal) vérifient un calcul fonctionnel qui s'interprète en termes de propagation d'erreurs. Cette approche, qui est notre cadre théorique, reprend plusieurs idées essentielles présentes dans les travaux pionniers de Gauss et s'adapte parfaitement aux situations rencontrées en modélisation physique et financière [2]. Cependant, le choix des hypothèses sur les erreurs est effectué *a priori* en tenant compte essentiellement de la nécessité de mener les calculs à bien.

Apports de la thèse

L'objectif principal de notre travail de recherche a été de relier solidement le calcul d'erreur par formes de Dirichlet à l'expérience: de la même manière que le calcul des probabilités s'est naturellement vu enrichi de la théorie des statistiques pour modéliser des situations concrètes à travers des méthodologies rigoureuses (techniques d'échantillonnage, estimation paramétrique et fonctionnelle, théorie des tests), le but est ici d'amorcer une démarche analogue. Deux voies complémentaires ont été abordées. Nous avons, dans un premier temps, exploré la connexion avec les statistiques paramétriques via la notion d'information de Fisher mettant ainsi en évidence une forte compatibilité entre les propriétés analytiques bien connues de la matrice d'information de Fisher et les opérations algébriques élémentaires (image, produit) liées au calcul d'erreur. Cette étude a été complétée par l'extension en termes de forme de Dirichlet de certains théorèmes limites fonctionnels de la théorie des probabilités (théorème de la limite centrale hilbertien, théorème de Donsker). De la même manière que l'utilisation de la loi normale en statistique s'explique en partie par le théorème de la limite centrale, nous avons mis en évidence l'importance d'une famille de structures d'erreur par des arguments asymptotiques. En particulier, sur l'espace de Wiener, les résultats obtenus donnent une interprétation originale du calcul de Malliavin comme objet limite.

Résumés des articles

N. Bouleau, C. Chorro : *Error structures and parameter estimation*, Cahiers de la mse, 2004.79, 19 pages, Univ. Paris 1, 2004. (ce travail a fait l'objet d'une note aux CRAS)

Une structure d'erreur étant un espace de probabilité muni d'un opérateur Γ prenant en compte les erreurs, il est naturel de chercher à étendre l'identification statistique des lois de probabilité au cas des structures d'erreur. Ainsi, si θ est un paramètre inconnu à valeurs dans un ouvert Θ de $\mathbb{R}^d$, nous voulons mettre en place expérimentalement une structure d'erreur dans laquelle l'opérateur Γ exprime la précision de la connaissance que l'on a sur θ avec les moyens statistiques employés. Lorsque l'on estime θ à l'aide d'un modèle paramétrique régulier $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$, l'inégalité de Cramer-Rao nous conduit à poser l'identification fondamentale suivante: $\Gamma[Id] = J^{-1}$ où J est la matrice d'information de Fisher associée à $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Cela est bien naturel, Fisher lui-même présentait J comme une précision (intrinsic accuracy) sur le paramètre [5]. Le but de cet article est de tester la robustesse de cette identification. En ce qui concerne les changements de variables injectifs réguliers, on peut voir que la reparamétrisation induite sur le modèle se traduit par la notion de structure d'erreur image grâce aux propriétés analytiques de la matrice J. Dans le problème de l'estimation directe de la grandeur $\psi(\theta)$ lorsque ψ n'est pas injective, nous obtenons des résultats asymptotiques commodes pour les applications. Enfin, lorsque l'on s'intéresse à l'estimation de grandeurs produit, où les composantes sont estimées à l'aide d'expériences indépendantes, le phénomène naturel de sommation des erreurs s'exprime dans la notion de structure d'erreur produit et ouvre la voie à une généralisation aux grandeurs infini-dimensionnelles.

Mots-Clés: Erreurs, sensibilité, formes de Dirichlet, opérateur carré du champ, inégalité de Cramer-Rao, information de Fisher.

C. Chorro : *On an extension of the central limit theorem to Dirichlet forms*, Cahiers de la mse, 2004.80, 16 pages, Univ. Paris 1, 2004. (soumis pour publication à Osaka Journal of Mathematics)

Dans un article récent [1], Nicolas Bouleau propose un nouvel outil, basé sur la théorie des formes de Dirichlet, pour étudier les erreurs et renforcer ainsi l'approche historique de Gauss. De la même manière que l'emploi de la loi normale en statistiques peut s'expliquer en partie par le théorème de la limite centrale, le but de cet article est de souligner l'importance d'une famille de structures d'erreur par des arguments asymptotiques. La principale difficulté est ici de démontrer la fermabilité de la forme bilinéaire limite à l'aide de méthodes hilbertiennes et d'une intégration par parties en dimension infinie.

Mots-clés: Formes de Dirichlet, opérateur carré du champ, domaine vectoriel, théorème de la limite centrale, fermabilité, erreurs.

C. Chorro : *Convergence in Dirichlet law of certain stochastic integrals*, Electron. J. Probab. 10, 1005-1025, 2005.

Dans [3], Nicolas Bouleau étudie l'approximation polygonale de Donsker sur $[0,1]$

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1} \right)$$

lorsque les variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées erronées, les erreurs étant modélisées par des structures d'erreur. Il montre sous des hypothèses d'indépendance et de stationnarité sur les erreurs, que le processus continu X_n converge en loi de Dirichlet vers la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. Cet article est consacré à l'extension de ce résultat à certaines familles d'intégrales stochastiques du processus X_n. Trois cas seront envisagés.

Lorsque $h \in L^2([0,1])$, la convergence en loi de Dirichlet de $Y_n^h = \int_0^\cdot h(s)dX_n(s)$ est obtenue sans hypothèses de régularité sur h. Ce résultat est complété par l'étude d'approximations continues de processus gaussiens réguliers (au sens de Delgado et Jolis dans [4]) incluant le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0,1[$. Enfin, on s'intéresse à la convergence de l'intégrale multiple

$$\int_{[0,t]^p} h(x_1,\ldots,x_p)dX_n(x_1)\ldots dX_n(x_p)$$

où h est donnée par une multi-mesure. Dans ce cas, une simple intégration par parties montre que l'intégrale multiple est donnée par un opérateur continu du processus X_n dont la régularité est compatible avec le calcul d'erreur. Notons enfin que d'un point de vue purement probabiliste, les résultats obtenus sortent du cadre généralement employé dans la littérature.

Mots-Clés: Principe d'Invariance de Donsker, intégrales stochastiques, formes de Dirichlet, opérateur carré du champ, domaine vectoriel, erreurs.

Article en préparation

Cet article reprend certains résultats contenus dans le chapitre 2 de la thèse (§ 2.3).

Soient $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les applications coordonnées de l'espace de probabilité produit $(W, \mathcal{W}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0,1))^{\mathbb{N}}$ et $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2([0,1], dx)$. Considérons un processus gaussien $(Z_t)_{t\in[0,1]}$, continu et centré, de la forme

$$Z_t = \int_0^t K(t,s)dB_s$$

où $K(.,.)$ est un noyau de carré intégrable sur $[0,1]^2$ et B un Brownien standard. Pour $t \in [0,1]$, nous notons $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} g_k \int_0^t \chi_k(s)ds.$$

Nous nous intéressons à la convergence (au sens des formes de Dirichlet) de la suite de processus continus sur $[0,1]$ définie par

$$Z_n(t) = \int_0^t K(t,s)dY_n(s) = \sum_{k=0}^{n} g_k \int_0^t K(t,s)\chi_k(s)ds.$$

D'un point de vue purement probabiliste, la convergence de Z_n vers Z est une simple conséquence du puissant théorème de convergence des martingales vectorielles.

Lorsque les g_k sont erronées (au sens des structures d'erreur), nous étendons ce résultat sous des hypothèses très générales en utilisant un argument bien connu de symétrisation. Enfin, une interprétation en termes de simulation est proposée en liaison avec la méthode de Karhunen-Loève.

Mots-Clés: Formes de Dirichlet, opérateur carré du champ, domaine vectoriel, approximation de processus gaussiens, symétrisation.

Références:

[1] N. Bouleau, Calcul d'erreur complet lipschitzien et formes de Dirichlet,J. Math. Pures Appl. (9) **80** (2001), no. 9, 961–976.

[2] N. Bouleau, *Error calculus for finance and physics: the language of Dirichlet forms*, de Gruyter, Berlin, 2003.

[3] N. Bouleau, Théorème de Donsker et formes de Dirichlet, Bull. Sci. Math. **129** (2005), no. 5, 369–380.

[4] R. Delgado and M. Jolis, Weak approximation for a class of Gaussian processes, J. Appl. Probab. **37** (2000), no. 2, 400–407.

[5] R.A. Fisher, Theory of statistical information, Proc. Cambridge Philo. Soc. **22** (1925).

PROJET DE RECHERCHE

La description des travaux effectués dans le cadre de la thèse met en évidence plusieurs pistes de développement qui seront explorées dans le futur. Nous en proposons ici une présentation succincte qui fait apparaître trois grandes thématiques.

Liens avec les statistiques non paramétriques

• Nous avons obtenu dans l'article "*Error structures and parameter estimation*" des liens robustes entre le calcul d'erreur par formes de Dirichlet et les statistiques paramétriques via la notion d'information de Fisher. Une question naturelle est de savoir si un rapprochement analogue est possible dans le cas des statistiques non paramétriques, notamment en ce qui concerne l'estimation de type fonctionnelle. Cette question est d'autant plus intéressante qu'une réponse positive pourrait constituer un pont fondamental entre les deux approches envisagées dans la thèse. Malheureusement, la notion d'information de Fisher ne possède pas, à notre connaissance, d'extension suffisamment souple techniquement pour permettre d'aborder ce problème de front. Cependant, quelques remarques élémentaires permettent de considérer qu'une des pistes les plus sérieuses dans ce domaine est l'étude de l'expérience gaussienne de shift sur l'espace de Wiener.

• Au cours de la thèse (§ 0.4), l'étude d'un exemple lié à la convergence en loi du processus empirique a retenu notre attention. En effet, l'étude de la convergence (au sens des formes de Dirichlet) d'intégrales régulières de ce processus a montré que la limite n'est pas une structure de type Ornstein-Uhlenbeck (structures qui apparaissent naturellement dans les extensions de Donsker et du TCL) mais est de type Mehler généralisé. Ce caractère singulier mérite d'être étudié plus en détails.

Extension des théorèmes limites

• L'article "*On an extension of the central limit theorem to Dirichlet forms*" propose une extension du théorème de la limite centrale en terme de formes de Dirichlet lorsque les variables aléatoires sont à valeurs dans un espace de Hilbert séparable. Or, du point de vue purement probabiliste, ce résultat s'étend à une large famille d'espaces de Banach séparables possédant de bonnes propriétés géométriques. Malheureusement, les conditions classiques, dans les espaces de Banach ayant un type et un cotype finis ([5]) ou sur l'espace de Wiener ([4]), semblent, pour l'instant, insuffisantes pour pallier le manque d'orthogonalité qui est la pierre angulaire des techniques mises en oeuvre dans cet article. L'obtention de conditions minimales pour assurer la validité de ce résultat est une piste de travail intéressante.

• Dans l'article "*Convergence in Dirichlet law of certain stochastic integrals*", la convergence en loi au sens des formes de Dirichlet d'une large famille d'intégrales du processus

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt]) U_{[nt]+1} \right)$$

vers les intégrales de Stratonovich correspondantes pose naturellement la question de l'extension au cas des solutions de certaines équations différentielles stochastiques.

Soient $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions suffisamment régulières pour que le processus de diffusion $(Y_t)_{t\in[0,1]}$, solution de l'équation différentielle stochastique au sens Stratonovich existe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, on note $Y_n(t)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$dY_n(t) = b(Y_n(t))dt + \sigma(Y_n(t))dX_n(t) \tag{1}$$

qui est une approximation naturelle de $Y(t)$. La convergence en loi sur l'espace de Wiener de la suite de processus continus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Y est traitée dans [3] en utilisant le cadre général proposé par Strook et Varadhan. Pour ce qui est de l'étude de la convergence au sens des formes de Dirichlet de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Y, plusieurs problèmes techniques, dus à l'apparition de phénomènes de non linéarité, se posent. Cependant, on peut raisonnablement envisager qu'une telle convergence ait lieu en renforçant les conditions d'intégrabilité sur les $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et leurs erreurs.

Du coté des applications

Un des cadres d'application privilégié du calcul d'erreur par formes de Dirichlet est la finance mathématique. Dans [1], Bouleau met en oeuvre ces techniques pour étudier la sensibilité de grandeurs financières significatives aux paramètres scalaires ou fonctionnels du modèle (taux d'intérêt, volatilité, mouvement Brownien). La souplesse de ce langage permet de mener à bien les calculs dans des modèles de diffusion très généraux. En particulier, sur l'espace de Wiener, la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck (dont l'importance a été en partie justifiée dans la thèse) est liée au calcul de Malliavin et possède donc un intérêt important pour le calcul des grecques par simulation Monte-Carlo. La théorie des formes de Dirichlet permet de généraliser ces techniques à d'autres espaces de probabilité via des formules d'intégration par parties. Les outils utilisés dans la thèse permettent d'envisager à terme des contributions dans ce sens dans l'esprit de [2].

Références:

[1] N. Bouleau, *Error calculus for finance and physics: the language of Dirichlet forms*, de Gruyter, Berlin, 2003.

[2] N. Bouleau, *Dirichlet forms in simulation* , Monte Carlo Methods and Appl. Vol 11, n°4, p385-396, 2005

[3] L. Caramellino, A. Climescu-Haulica and B. Pacchiarotti: *Diffusion approxi mation for random walks on nilpotent Lie groups*, Statistics and probability letters 41 (1999), 363-377.

[4] R.M. Dudley : *Metric entopy and the central limit theorem in* $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, Ann. Institut Fourier 24, 49-60, 1974.

[5] M. Ledoux, M.Talagrand : *Probability in Banach Spaces*, Springer-Verlag, 1991.

Rapport de soutenance

Rapports de thèse

Rapporteurs:

Professeur LAURENT DENIS
Laboratoire d'Analyse et de Probabilité,
Université d'Évry,
laurent.denis@univ-evry.fr

Professeur NICOLAS PRIVAULT
Département de Mathématiques,
Université de La Rochelle,
nicolas.privault@univ-lr.fr