

B&S Pratique et limites

Christophe Chorro (christophe.chorro@univ-paris1.fr)

Université Paris 1

Décembre 2008

- **Chapitre 1: Pratique du modèle**
 - Le modèle
 - Estimation de la volatilité historique
 - Simulation des trajectoires
 - Calcul des prix
- **Chapitre 2: Les grecques**
 - Definition
 - Cas du Call et du Put Européens
 - Méthode des différences finies
 - Méthode d'intégration par parties (Malliavin...)
 - Résultats numériques (Call,Put,Digitales,Corridor)
- **Chapitre 3: Limites du modèle**
 - L'hypothèse de log-normalité
 - Performances de Pricing
 - σ constante???
- **Chapitre 4: Remarques finales**
 - Prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule de BS

- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

Le modèle

On considère un mouvement Brownien standard $(\mathbf{B}_t)_{t \in [0, T]}$ et la filtration associée $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$.

Dans le modèle de Black et Scholes, la dynamique de l'**actif risqué** est donnée par l'EDS suivante:

$$\underline{dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dB_t.}$$

Cette EDS a une unique solution de condition initiale $x_0 > 0$ donnée par le Brownien géométrique

$$S_t = x_0 e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}.$$

Concernant l'**actif sans risque**, nous le supposons associé au **taux d'intérêt continu et constant** r .

Dans la suite **nous nous placerons sous l'unique probabilité risque neutre** ce qui revient tout simplement à considérer que $b = r$.

- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - **Estimation de σ**
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

Estimation de σ

A $t = 0$ se pose la **question du choix de σ sur $[0, T]$** .

Soit $\tilde{T} \in \mathbb{R}_+$, on suppose que la dynamique de l'actif risqué sur $[-\tilde{T}, 0]$ est la même que sur $[0, T]$ (principe des stats...).

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ représentant le nombre d'observations (effectuées à intervalles de temps réguliers) dans le passé, les variables

$$Y_1^N = \text{Log} \left(\frac{S_0}{S_{-\frac{\tilde{T}}{N}}} \right), \dots, Y_N^N = \text{Log} \left(\frac{S_{-\frac{(N-1)\tilde{T}}{N}}}{S_{-\tilde{T}}} \right)$$

sont, sous P , i.i.d de loi

$$\mathcal{N} \left(\left(b - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tilde{T}}{N}, \sigma^2 \frac{\tilde{T}}{N} \right).$$

Pour estimer σ on utilise **la variance empirique**

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{\tilde{T}(N-1)} \sum_{i=1}^N (Y_i^N - \bar{Y})^2} \text{ où } \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i^N.$$

- On obtient également une **Approximation de b** en posant

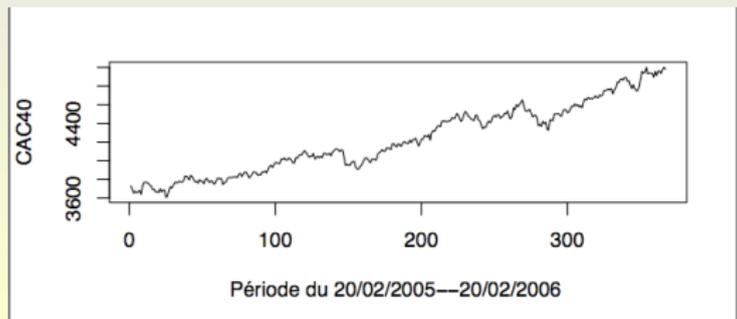
$$\hat{b} = \frac{N}{\tilde{T}} \bar{Y} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}$$

- Si le temps est exprimé en jours on obtient la vol journalière
- Si le temps est exprimé en années on obtient la vol annuelle
- **vol annuelle = vol journalière * $\sqrt{250}$**
- En pratique, on prend souvent $\tilde{T} \approx T$ pour ne pas prendre en compte des données trop anciennes.
- Le choix de N est limité par la fréquence des quotations sur le marché (et des données que l'on possède).

Estimation de σ

Pour le CAC 40 sur la période du 20 – 02 – 2005 au 20 – 02 – 2006,
($T = 1$ an, $N = 365$)

on obtient (en annuel) $\hat{\sigma} = 0,1128$.



- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - **simulation**
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

Simulation du mouvement brownien

On considère une subdivision $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ of $[0, T]$. On veut **simulate**

$$(\mathbf{B}_{t_0}, \dots, \mathbf{B}_{t_n}).$$

Idée:

$$\mathbf{B}_{t_k} = \mathbf{B}_{t_{k-1}} + \underbrace{\mathbf{B}_{t_k} - \mathbf{B}_{t_{k-1}}}_{\mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1}) \perp \mathbf{B}_{t_{k-1}}, \dots, \mathbf{B}_0}.$$

Proposition

Si (G_1, \dots, G_n) sont i.i.d suivant une $\mathcal{N}(0, 1)$, on définit

$$X_0 = 0, X_i = \sum_{j=1}^i \sqrt{t_j - t_{j-1}} G_j \quad i > 0.$$

Alors

$$(X_0, \dots, X_n) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (\mathbf{B}_{t_0}, \dots, \mathbf{B}_{t_n}).$$

On doit simuler des échantillons gaussiens

Proposition

If U_1 and U_2 are two independent uniform random variables on $[0, 1]$ then

$$G_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2) \text{ and } G_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

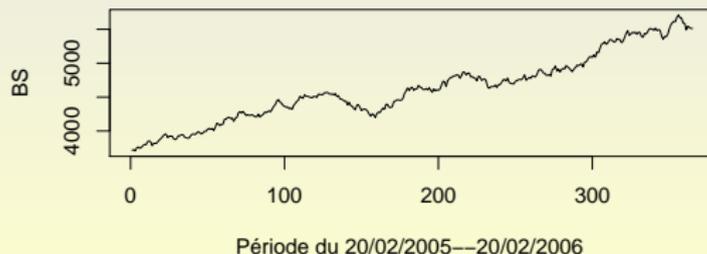
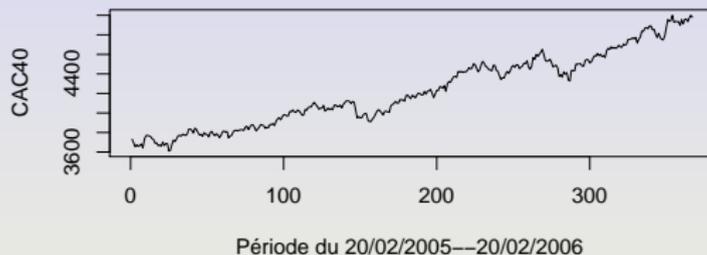
are two independent $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Il est alors très simple de simuler la dynamique de l'actif risqué en utilisant

$$S_t = x_0 e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}.$$

Simulation dans B&S

Comparaison entre une trajectoire simulée pour les paramètres $S_0 = 3700$, $\hat{\sigma} = 0.1128$, $\hat{m} = ???$ et celle du CAC 40.



- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

What is, in this model, the price of a contingent claim with payoff Φ_T at T ?

Proposition

In the B&S model there exists a unique probability $Q \sim P$ such that the price at $t = 0$ of a contingent claim with payoff Φ_T at T is given by

$$\text{price} = e^{-rT} \mathbb{E}_Q[\Phi_T].$$

Moreover the dynamic of the risky asset under Q is given by

$$\underline{dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t} \quad (\mu \Leftrightarrow r) \quad (1)$$

where W is a standard BM under Q .

Black Scholes model

Examples: The Black Scholes Formulas

- For **Call options** ($\Phi_T = (S_T - K)_+$) one has

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[(S_T - K)_+] = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (2)$$

where

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{and} \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3)$$

and where N is the distribution function of a $\mathcal{N}(0, 1)$.

- For **Put options** ($\Phi_T = (K - S_T)_+$) one has

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[(K - S_T)_+] = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2). \quad (4)$$

Black Scholes model

This formulas are fundamental because

- They are **easy** to compute in practice
- They are a **Benchmark** to test numerical methods
- In the case where we don't have closed form formulas we may use **Monte Carlo Methods**

$$price = e^{-rT} \mathbb{E}_Q[\Phi_T] \approx price = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_T^i$$

where the Φ_T^i are independent realizations of Φ_T .

Moreover we have a control of the error (CLT): with a probability of 95%

$$price \in \left[e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_T^i - \frac{1.96 e^{-2rT} \Sigma}{\sqrt{N}}, e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_T^i + \frac{1.96 e^{-2rT} \Sigma}{\sqrt{N}} \right]$$

Σ being the (empirical) variance of Φ_T .

- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - **Définition**
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

Définition

On notera \mathbf{E}^* [...] l'espérance sous la probabilité risque neutre.

Dans ce contexte, le prix d'un **actif contingent** caractérisé par son Payoff h (\mathcal{F}_T mesurable, de carré intégrable) en T est donné par $\forall t \in [0, T]$,

$$P_t = E^*[e^{-r(T-t)}h \mid \mathcal{F}_t] = F(t, S_t).$$

Rq: • La dernière égalité provient du caractère **Markovien** du mouvement Brownien.

• Sous des hypothèses très faibles sur h , $F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En particulier lorsque $h = f(S_T)$, $F(t, x) = E^*[e^{-r(T-t)}f(S_{T-t}^x)]$ donc

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Les Grecques sont des indicateurs qui mesurent la sensibilité du prix par rapport à un paramètre donné.

- Δ mesure la sensibilité du prix par rapport au sous jacent

$$\Delta_t(S_t) = \frac{\partial F}{\partial X}(t, S_t)$$

C'est aussi la quantité d'actif risqué dans le portefeuille de couverture!

- Γ mesure la sensibilité du delta par rapport au sous jacent

$$\Gamma_t(S_t) = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(t, S_t)$$

C'est aussi une mesure de la fréquence de rebalancement du portefeuille de couverture!

- Θ mesure la sensibilité du prix par rapport au temps

$$\Theta_t(S_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t)$$

- ρ mesure la sensibilité du prix par rapport au taux d'intérêt

$$\rho_t(S_t) = \frac{\partial F}{\partial r}(t, S_t)$$

- *vega* (qui n'est pas une lettre grecque!!!) mesure la sensibilité du prix par rapport à la volatilité

$$vega_t(S_t) = \frac{\partial F}{\partial \sigma}(t, S_t)$$

C'est aussi un indicateur des précautions à prendre dans l'estimation de la volatilité!

- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - **Le cas du Call et du Put**
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

Cas du Call et du Put

Dans le cas du **call et du put** (de strike K et d'échéance T) les valeurs des grecques à $t = 0$ sont données par le tableau suivant:

| | Call | Put |
|---------------|---|--|
| $\Delta_0(x)$ | $N(d_1) > 0$ | $-N(-d_1) < 0$ |
| $\Gamma_0(x)$ | $\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} N'(d_1) > 0$ | $\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} N'(d_1) > 0$ |
| $\Theta_0(x)$ | $-\frac{x\sigma}{2\sqrt{T}} N'(d_1) - Kre^{-rT} N(d_2) < 0$ | $\frac{x\sigma}{2\sqrt{T}} N'(d_1) + Kre^{-rT} (N(d_2) - 1)$ |
| $\rho_0(x)$ | $TKe^{-rT} N(d_2) > 0$ | $TKe^{-rT} (N(d_2) - 1) < 0$ |
| $vega_0(x)$ | $x\sqrt{T} N'(d_1) > 0$ | $x\sqrt{T} N'(d_1) > 0$ |

où

$$d_1(x) = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2(x) = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (5)$$

et où N est la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(0, 1)$.

Cas du Call et du Put

- Pour obtenir les valeurs des grecques en t il suffit de changer T en $T - t$
- D'un point de vue pratique, il suffit d'être capable d'approximer la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(0, 1)$ (classique!!!)
- Ces quantités connues nous serviront de Benchmark pour tester les méthodes numériques générales.

On se limitera par la suite au Δ et au Γ .

- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - **Différences finies**
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

Une méthode classique est d'utiliser un schéma de **différences finies**:

$$\Delta_t(x) \approx \frac{F(t, x + h) - F(t, x - h)}{2h}$$

$$\Gamma_t(x) \approx \frac{F(t, x + h) + F(t, x - h) - 2F(t, x)}{h^2}$$

où h est suffisamment petit.

$F(t, x + h)$, $F(t, x - h)$ et $F(t, x)$ sont calculés par **méthode de Monte Carlo**.

Rappel: $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}^*[\mathbf{e}^{-r(T-t)}\mathbf{f}(\mathbf{S}_{T-t}^{\mathbf{x}})]$.

Différences finies

- Contrairement au calcul du prix, pour les grecques il y a **deux sources d'erreur**:

Erreur de différences finies + Erreur Monte Carlo

- Le choix de h peut s'avérer ardu (cf: Broadie-Glasserman):
 - Prendre h trop grand fait que l'erreur de premier type devient grande.
 - Prendre h trop petit peut faire exploser la variance de l'estimateur Monte Carlo.
- Dans le cas où $\Delta_t(x) \approx \frac{F(t,x+h)-F(t,x-h)}{2h}$ comme

$$\text{Var}(F(t, x + h) - F(t, x - h)) = \text{Var}(F(t, x + h)) + \text{Var}(F(t, x - h)) - 2\text{Cov}(F(t, x + h), F(t, x - h))$$

mieux vaut (souvent) utiliser le même échantillon gaussien pour les deux simulations MC!

A priori (nous le confirmerons par les simulations) **cette méthode** doit **être d'autant plus efficace** que les payoff (donc les prix) sont **régulier** en la variable x :

- Lorsque $f(y) = 1_{y \geq M}$ (Option binaire)

$$\mathbf{E}^* [| \mathbf{f}(\mathbf{S}_T^{\mathbf{x}+\mathbf{h}}) - \mathbf{f}(\mathbf{S}_T^{\mathbf{x}}) |^2] = \mathbf{P}^* \left(\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{x} + \mathbf{h}} < \mathbf{e}^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \mathbf{B}_T} < \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{O}(\mathbf{h}).$$

- Lorsque $f(y) = (y - K)_+$ (Call)

$$\mathbf{E}^* [| \mathbf{f}(\mathbf{S}_T^{\mathbf{x}+\mathbf{h}}) - \mathbf{f}(\mathbf{S}_T^{\mathbf{x}}) |^2] \leq \mathbf{E}^* [(\mathbf{S}_T^{\mathbf{x}+\mathbf{h}} - \mathbf{S}_T^{\mathbf{x}})^2] = \mathbf{h}^2 \mathbf{E}^* [\mathbf{e}^{2(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + 2\sigma \mathbf{B}_T}] = \mathbf{O}(\mathbf{h}^2).$$

- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - **Integration par parties**
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

L'idée est très simple: Ecrire les grecques sous la forme

$$\text{Grecques} = E * [\text{PAYOFF} \times \text{Poids}]$$

avec

- Un poids indépendant du Payoff.
- Un poids tel que $\text{PAYOFF} \times \text{Poids}$ soit de variance minimale.

Integration par parties: Payoff de la forme $h = f(S_T)$

La méthode repose sur le résultat suivant **indépendant de f** :

Proposition

On a

$$\Delta_t(x) = e^{-r(T-t)} E^* \left[\frac{B_{T-t}}{x\sigma(T-t)} f(S_{T-t}^x) \right]$$

et

$$\Gamma_t(x) = e^{-r(T-t)} E^* \left[\left(\frac{-B_{T-t}}{x^2\sigma(T-t)} + \frac{B_{T-t}^2 - (T-t)}{(\sigma(T-t)x)^2} \right) f(S_{T-t}^x) \right].$$

Payoff de la forme $h = f(S_T)$

Preuve dans le cas du delta: Soit $f \in C_K^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (sinon approximation).

D'après le théorème de **dérivation sous le signe somme**,

$$\Delta_t(x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{f(xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}})}_{g(x,y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Or

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Ainsi par **Intégration par partie**,

$$\Delta_t(x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{x\sigma\sqrt{T-t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}) \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

donc

$$\Delta_t(x) = e^{-r(T-t)} E^* \left[\frac{B_{T-t}}{x\sigma(T-t)} f(S_{T-t}^x) \right]. \square$$

Payoff de la forme $h = f(S_T)$

Avantages:

- Un seul facteur d'approximation (MC) et donc d'erreur
- Technique qui ne dépend pas du Payoff (le poids est indépendant de f).

Question:

- A t'on un critère d'optimalité pour ce poids?

Payoff de la forme $h = f(S_T)$

Proposition

Soit Π un poids de carré intégrable vérifiant pour tout Payoff $f(S_T)$

$$\text{Grecque} = E^*[f(S_T) \times \Pi].$$

Alors le poids *minimisant la variance* de $f(S_T) \times \Pi$ est donné par

$$\Pi_0 = E^*[\Pi \mid \mathcal{F}_T].$$

Rq: Les poids de la proposition précédente sont optimaux.

Payoff de la forme $h = f(S_T)$

Preuve: Soit $\tilde{\Pi}$ vérifiant grecque = $E^*[f(S_T)\tilde{\Pi}]$, on veut minimiser $Var(f(S_T)\tilde{\Pi})$.

On a

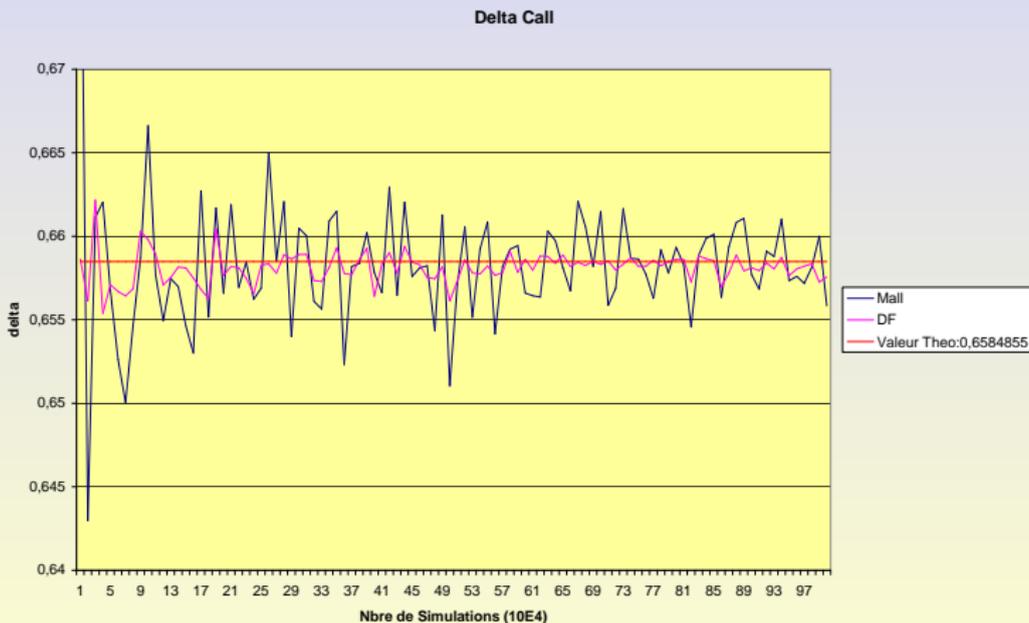
$$\begin{aligned} Var(f(S_T)\tilde{\Pi}) &= E^* \left[\left(f(S_T)\tilde{\Pi} - grecque \right)^2 \right] \\ &= E^* \left[\left(f(S_T)(\tilde{\Pi} - \Pi_0) + f(S_T)\Pi_0 - grecque \right)^2 \right] \\ &= E^* \left[\left(f(S_T)(\tilde{\Pi} - \Pi_0) \right)^2 \right] + Var(f(S_T)\tilde{\Pi}_0) \\ &\quad + 2E^* \left[\left(f(S_T)(\tilde{\Pi} - \Pi_0)(\Pi_0 f(S_T) - grecque) \right) \right]. \end{aligned}$$

La dernière ligne étant nulle, le résultat en découle. \square

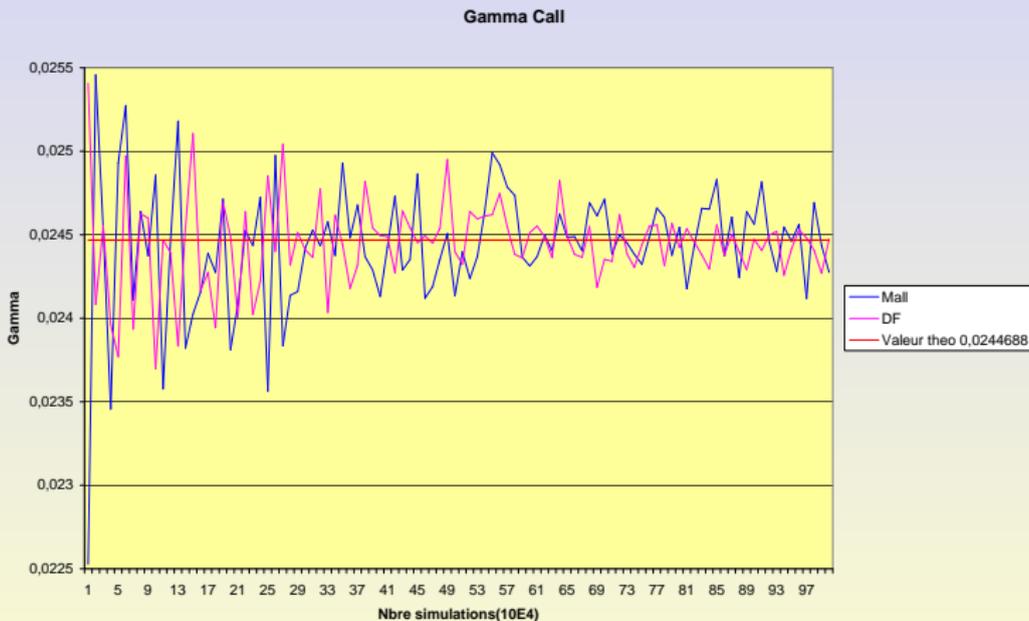
- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - **Résultats numériques**
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

Résultats numériques Call-Put

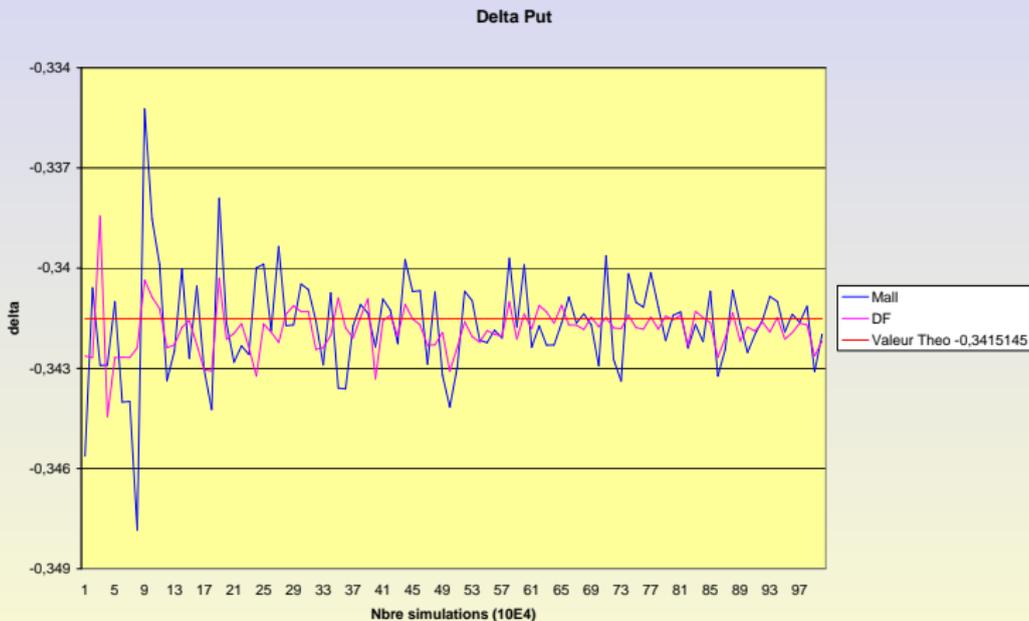
On prend $x = 100$, $K = 100$, $\sigma = 0,15$, $r = 0,05$, $T = 1$, $t = 0$.



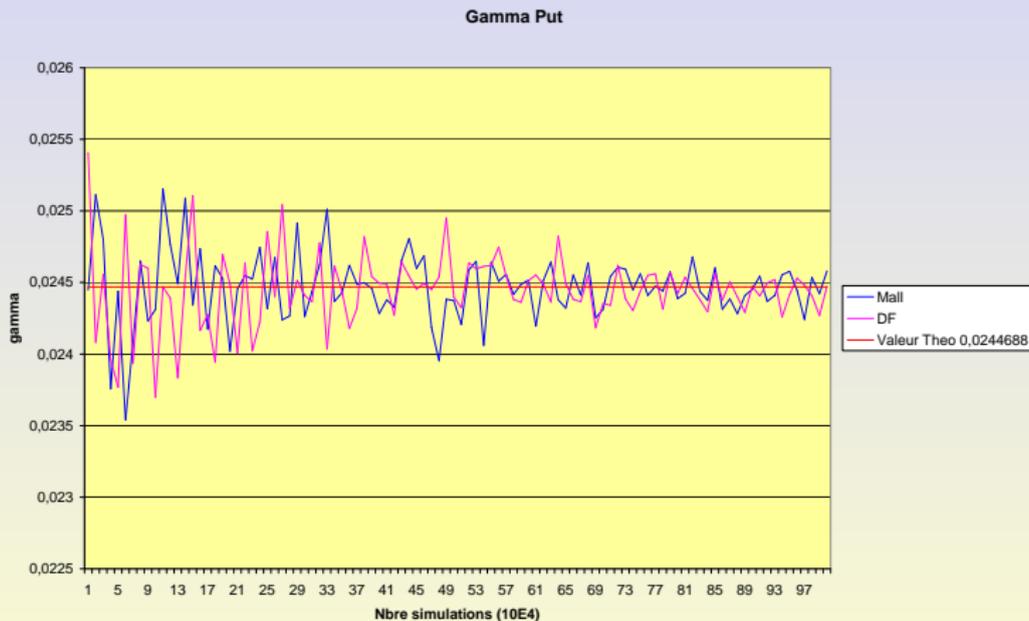
Résultats numériques Call-Put



Résultats numériques Call-Put



Résultats numériques Call-Put



Résultats numériques Call-Put

| Call | Ratio des Variances (DF/ Malliavin) |
|----------|-------------------------------------|
| Δ | 0.134 |
| Γ | 0.132 |

| Put | Ratio des Variances (DF/ Malliavin) |
|----------|-------------------------------------|
| Δ | 0.30 |
| Γ | 1.32 |

- Le PAYOFF étant régulier, les DF sont assez performantes.
- L'IPP donne de meilleurs résultats pour le Put que pour le Call (Explosion du poids!!!)

Une **option digitale** est caractérisée par son payoff $1_{S_T^x > K_{min}}$ irrégulier en K_{min} .
Il est facile (exo) de montrer que dans ce cas

$$F(0, x) = e^{-rT} KN(d),$$

$$\Delta_0(x) = \frac{e^{-rT}}{x\sigma\sqrt{T}} n(d)$$

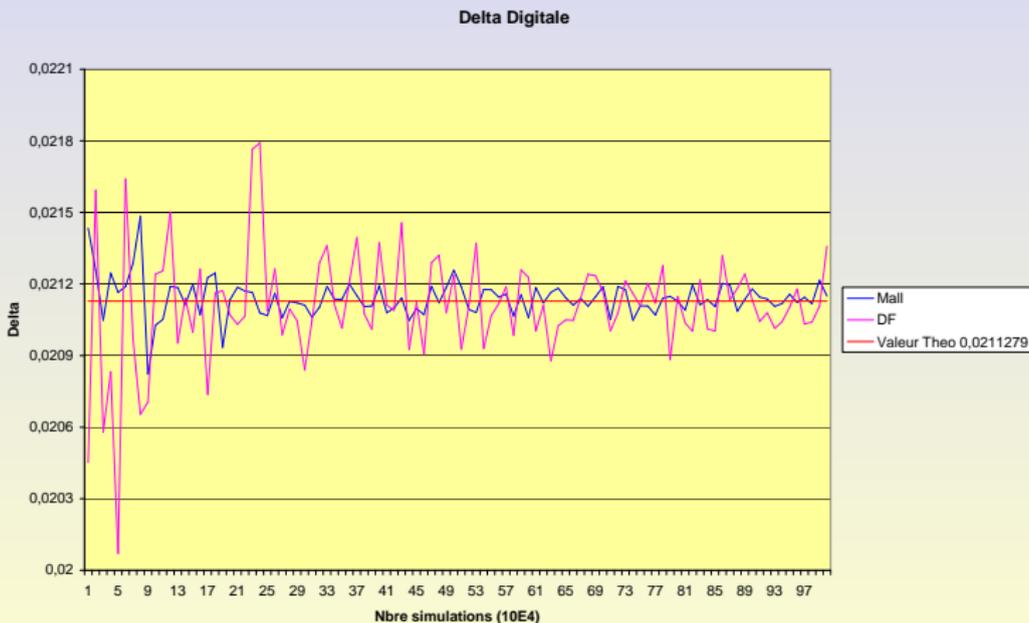
et

$$\Gamma_0(x) = \frac{e^{-rT}}{x^2\sigma^2 T} n(d) (d + \sigma\sqrt{T})$$

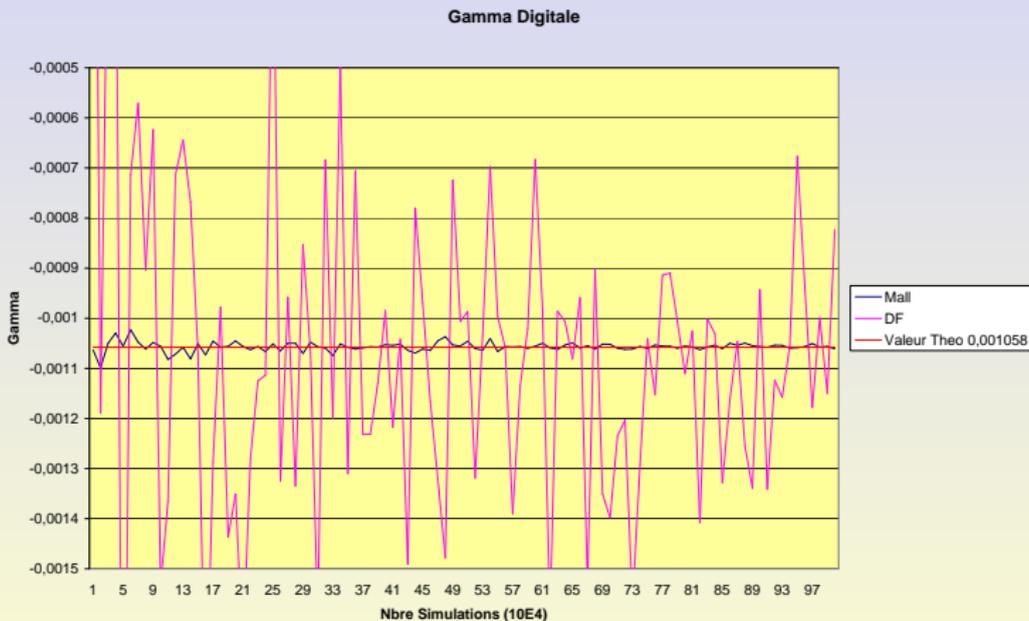
où n est la densité d'une $\mathcal{N}(0, 1)$ et où $d = \frac{\log(\frac{x}{K_{min}}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T)}{\sigma\sqrt{T}}$.

Résultats numériques Digitale

On prend $x = 100$, $K = 100$, $\sigma = 0,15$, $r = 0,05$, $T = 1$, $K_{min} = 95$.



Résultats numériques Digitale

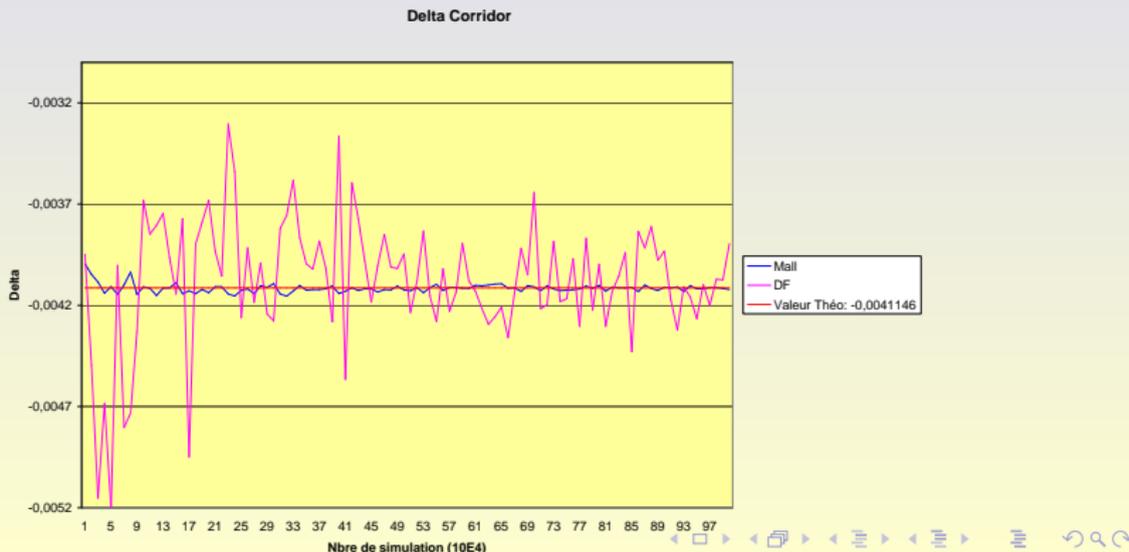


| Digitale | Ratio des Variances (DF/ Malliavin) |
|----------|-------------------------------------|
| Δ | 5.31 |
| Γ | 2354 |

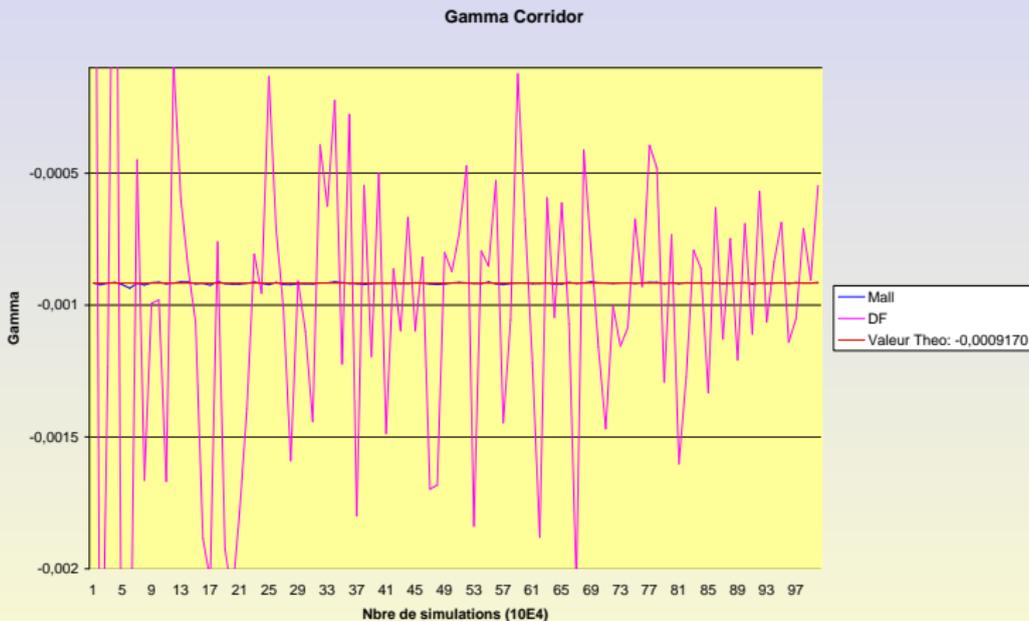
Résultats numériques Corridor

Une option **corridor** est caractérisée par son payoff $1_{K_{max} > S_T^x > K_{min}}$ (c'est en fait la différence de deux digitales).

On prend $x = 100$, $K = 100$, $\sigma = 0,15$, $r = 0,05$, $T = 1$, $K_{min} = 95$, $K_{max} = 105$.



Résultats numériques Corridor



Résultats numériques Corridor

| Corridor | Ratio des Variances (DF/ Malliavin) |
|----------|-------------------------------------|
| Δ | 134 |
| Γ | 5785 |

Résultats numériques

- La méthode IPP est **efficace lorsque l'irrégularité du payoff ou l'ordre de dérivation augmente.**
- En pratique les poids que nous trouvons sont des polynômes en W_T . Ainsi la méthode des poids sera d'autant meilleure que la maturité de l'option est petite (petit poids).
- De plus la méthode d'IPP sera plus efficace dans le cas d'un pue que dans celui d'un call.
- **La méthode d'IPP est en fait une technique de réduction de variance.** Elle se révélera encore plus efficace couplée aux techniques classiques (contrôle antithétique, variables de contrôle ou fonction d'importance....).

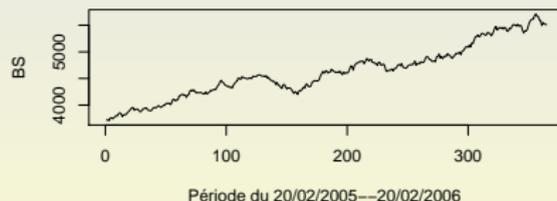
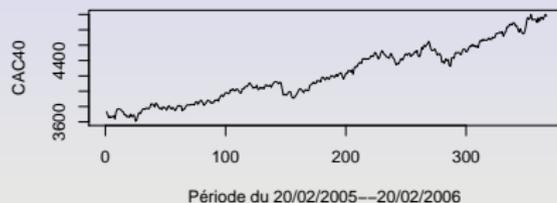
- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - **L'hypothèse log-normale**
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

L'hypothèse log-normale

- Historiquement: [Bachelier](#), [Samuelson](#)
- Les **calculs sont simples....**
- **Est ce réaliste???**

L'hypothèse log-normale

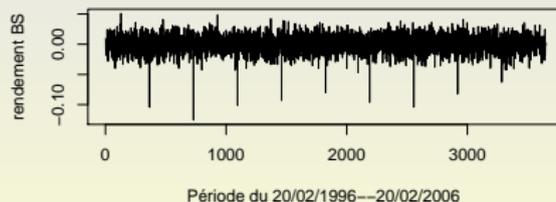
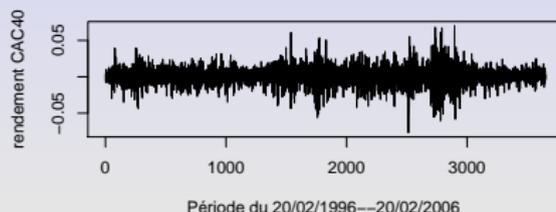
Comparaison entre une trajectoire simulée pour les paramètres $S_0 = 3700$, $\hat{\sigma} = 0.1128$, $\hat{m} = ???$ et celle du CAC 40.



L'irrégularité semble être la même...

L'hypothèse log-normale

Mais en regardant les rendements journaliers...



Absence d'événements extrêmes dans B & S

- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - **Performance de pricing**
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

Performance de pricing

Prix des options d'achat sur le CAC disponibles le 20-02-2006

($r = 0.26$, $S_0 = 4979.94$)

Feuille1

time to maturity

strike

| | 1.113889 | 1.369444 | 1.63 | 1.877778 | 2.130556 | 2.386111 | 2.641667 | 2.894444 |
|------|----------|----------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4300 | 778.82 | 726.97 | 776.89 | 825.85 | 891.95 | 823.04 | 871.24 | 900.19 |
| 4400 | 700.68 | 653.75 | 704.49 | 756.35 | 822.86 | 758.48 | 806.80 | 837.25 |
| 4500 | 625.43 | 584.91 | 637.25 | 689.50 | 755.79 | 696.11 | 744.30 | 776.80 |
| 4600 | 553.78 | 519.63 | 571.04 | 624.14 | 690.91 | 636.05 | 683.87 | 718.67 |
| 4700 | 485.44 | 455.62 | 509.49 | 562.04 | 628.44 | 581.87 | 628.40 | 664.43 |
| 4800 | 420.18 | 395.57 | 452.30 | 504.91 | 569.86 | 528.14 | 575.60 | 612.16 |
| 4900 | 360.83 | 339.46 | 397.66 | 448.08 | 514.66 | 478.10 | 525.29 | 559.50 |
| 5000 | 305.64 | 287.87 | 350.42 | 396.12 | 464.11 | 429.60 | 476.05 | 509.11 |
| 5100 | 254.45 | 241.75 | 305.55 | 346.68 | 413.25 | 382.36 | 427.63 | 460.72 |
| 5200 | 210.05 | 201.51 | 261.03 | 304.43 | 365.68 | 337.79 | 381.81 | 414.67 |
| 5300 | 170.14 | 166.16 | 221.44 | 263.85 | 320.74 | 295.92 | 338.64 | 370.98 |
| 5400 | 136.22 | 135.27 | 187.47 | 226.01 | 280.14 | 256.75 | 298.19 | 330.85 |
| 5500 | 107.16 | 109.13 | 154.73 | 192.83 | 243.11 | 220.29 | 260.46 | 294.23 |
| 5600 | 83.30 | 88.24 | 128.24 | 162.35 | 209.66 | 188.25 | 225.47 | 261.00 |
| 5700 | 66.82 | 68.61 | 106.77 | 136.67 | 181.40 | 162.44 | 193.13 | 237.23 |
| 5800 | 54.19 | 55.88 | 89.14 | 115.38 | 157.69 | 138.50 | 166.07 | 215.38 |
| 5900 | 42.95 | 45.28 | 75.18 | 96.37 | 137.25 | 118.93 | 143.39 | 195.32 |
| 6000 | 33.81 | 36.50 | 64.03 | 80.66 | 118.15 | 101.50 | 122.95 | 176.94 |
| 6100 | 26.45 | 29.28 | 53.69 | 67.54 | 101.17 | 85.53 | 105.48 | 160.13 |
| 6200 | 20.56 | 23.38 | 44.87 | 57.34 | 86.86 | 72.00 | 89.92 | 144.77 |
| 6300 | 15.88 | 18.58 | 37.38 | 48.56 | 74.25 | 60.63 | 76.85 | 130.76 |
| 6400 | 12.2 | 14.70 | 31.5 | 41.02 | 62.59 | 51.16 | 64.69 | 118.00 |

Performance de pricing

Prix BS Options d'Achat CAC 40 au 20/02/06 ($r=0.26$, $S_0 = 4979.94$, $\sigma = 0,1128$)

Feuille1

time to maturity

strike

| | 1.113889 | 1.369444 | 1.63187778 | 2.130556 | 2.386111 | 2.641667 | 2.894444 | |
|------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 4300 | 708.826526 | 720.873059 | 733.20012 | 745.43663 | 757.59135 | 769.72704 | 781.6717 | 793.280 |
| 4400 | 622.959641 | 637.803686 | 652.48849 | 666.72240 | 680.61356 | 694.29338 | 707.6102 | 720.436 |
| 4500 | 541.797465 | 559.424345 | 576.38825 | 592.51551 | 608.02972 | 623.13774 | 637.7134 | 651.650 |
| 4600 | 466.068009 | 486.285048 | 505.32479 | 523.15183 | 540.10862 | 556.47689 | 572.1576 | 587.066 |
| 4700 | 396.381719 | 418.825479 | 439.62445 | 458.87934 | 477.04118 | 494.45849 | 511.0570 | 526.771 |
| 4800 | 333.186107 | 357.349906 | 379.50038 | 399.85012 | 418.93616 | 437.15918 | 454.4643 | 470.800 |
| 4900 | 276.737150 | 302.014048 | 325.04692 | 346.11872 | 365.82063 | 384.58620 | 402.3720 | 419.135 |
| 5000 | 227.088349 | 252.822075 | 276.23967 | 297.64320 | 317.64125 | 336.67849 | 354.7139 | 371.707 |
| 5100 | 184.092401 | 209.630615 | 232.94052 | 254.29083 | 274.27051 | 293.31355 | 311.3721 | 328.400 |
| 5200 | 147.435957 | 172.177914 | 194.92233 | 215.85914 | 235.52460 | 254.32228 | 272.1894 | 289.069 |
| 5300 | 116.661579 | 140.095003 | 161.87438 | 182.07816 | 201.16393 | 219.48890 | 236.9689 | 253.5306 |
| 5400 | 91.215324 | 112.940022 | 133.42864 | 152.63140 | 170.91025 | 188.56484 | 205.4856 | 221.5793 |
| 5500 | 70.486256 | 90.224673 | 109.17898 | 127.17062 | 144.45850 | 161.27874 | 177.4947 | 192.9916 |
| 5600 | 53.843917 | 71.439537 | 88.69935 | 105.32958 | 121.48763 | 137.34505 | 152.7390 | 167.5332 |
| 5700 | 40.670273 | 56.076417 | 71.56021 | 86.73664 | 101.67049 | 116.47209 | 130.9554 | 144.9641 |
| 5800 | 30.384287 | 43.646488 | 57.34232 | 71.02553 | 84.68251 | 98.36907 | 111.8805 | 125.0435 |
| 5900 | 22.458656 | 33.693784 | 45.64754 | 57.84410 | 70.20885 | 82.75208 | 95.25620 | 107.5346 |
| 6000 | 16.429266 | 25.804126 | 36.10654 | 46.86092 | 57.95002 | 69.34884 | 80.83314 | 92.2074 |
| 6100 | 11.898525 | 19.609977 | 28.38377 | 37.76980 | 47.62592 | 57.90229 | 68.37430 | 78.8423 |
| 6200 | 8.533985 | 14.791916 | 22.17991 | 30.29256 | 38.97856 | 48.17309 | 57.65714 | 67.2314 |
| 6300 | 6.063713 | 11.077517 | 17.23237 | 24.18019 | 31.77347 | 39.94121 | 48.47512 | 57.1806 |
| 6400 | 4.269703 | 8.238383 | 13.31418 | 19.21277 | 25.80022 | 33.00657 | 40.63857 | 48.5100 |

Performance de pricing

Erreur relative de pricing

Feuille1

time to maturity
strike

| | | | | | | | | |
|------|----------|-------------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|
| | 1.113889 | 1.369444 | 1.63 | 1.877778 | 2.130556 | 2.386111 | 2.641667 | 2.894444 |
| 4300 | 0.089871 | 0.008386785 | 0.05623689 | 0.0973704 | 0.1506347 | 0.06477566 | 0.1028055 | 0.1187637 |
| 4400 | 0.110921 | 0.024392068 | 0.07381441 | 0.118500 | 0.1728683 | 0.0846253 | 0.122942 | 0.139520 |
| 4500 | 0.133720 | 0.043571926 | 0.09550686 | 0.140659 | 0.1955044 | 0.1048286 | 0.143203 | 0.161108 |
| 4600 | 0.158387 | 0.064170568 | 0.11507987 | 0.161803 | 0.2182649 | 0.1251051 | 0.163353 | 0.183121 |
| 4700 | 0.183458 | 0.080757036 | 0.13712840 | 0.183546 | 0.2409121 | 0.1502251 | 0.186732 | 0.207182 |
| 4800 | 0.207039 | 0.096620305 | 0.16095429 | 0.208076 | 0.2648437 | 0.1722664 | 0.210451 | 0.230918 |
| 4900 | 0.233053 | 0.110310350 | 0.18260093 | 0.227551 | 0.2891994 | 0.1955946 | 0.234000 | 0.250874 |
| 5000 | 0.257007 | 0.121749141 | 0.21168976 | 0.248603 | 0.3155906 | 0.2162977 | 0.254880 | 0.269888 |
| 5100 | 0.276508 | 0.132861985 | 0.23763535 | 0.266496 | 0.3363085 | 0.2328864 | 0.271865 | 0.287201 |
| 5200 | 0.298091 | 0.145561441 | 0.25325696 | 0.2909399 | 0.3559271 | 0.2470994 | 0.287107 | 0.302893 |
| 5300 | 0.314320 | 0.156866854 | 0.26899214 | 0.3099179 | 0.3728131 | 0.2582829 | 0.300233 | 0.316592 |
| 5400 | 0.330382 | 0.165077090 | 0.28826670 | 0.3246696 | 0.3899113 | 0.2655702 | 0.310890 | 0.330272 |
| 5500 | 0.342233 | 0.173236752 | 0.29439035 | 0.3405039 | 0.4057895 | 0.2678798 | 0.318533 | 0.344078 |
| 5600 | 0.353614 | 0.190395090 | 0.30833321 | 0.3512190 | 0.4205493 | 0.2704113 | 0.322574 | 0.358110 |
| 5700 | 0.391345 | 0.182678661 | 0.32977234 | 0.3653571 | 0.4395232 | 0.2829839 | 0.321931 | 0.388930 |
| 5800 | 0.439300 | 0.218924698 | 0.35671617 | 0.3844208 | 0.4629811 | 0.2897539 | 0.326304 | 0.419428 |
| 5900 | 0.477097 | 0.255879335 | 0.39282340 | 0.3997706 | 0.4884601 | 0.3041950 | 0.335684 | 0.449443 |
| 6000 | 0.514070 | 0.293037647 | 0.43609965 | 0.4190315 | 0.5095216 | 0.3167601 | 0.342552 | 0.478877 |
| 6100 | 0.550150 | 0.330260362 | 0.47133970 | 0.4407788 | 0.5292486 | 0.3230177 | 0.351779 | 0.507635 |
| 6200 | 0.584922 | 0.367326102 | 0.50568499 | 0.4717027 | 0.5512485 | 0.3309292 | 0.358795 | 0.535598 |
| 6300 | 0.618154 | 0.403793488 | 0.53899500 | 0.5020554 | 0.5720745 | 0.3412303 | 0.369224 | 0.562705 |
| 6400 | 0.650024 | 0.439565811 | 0.57120180 | 0.5316242 | 0.5877901 | 0.3548363 | 0.371795 | 0.588898 |

Erreur relative de pricing

Le modèle sous estime les prix dans le cas où

- La maturité est “petite”
- Les options d'achat sont fortement **dans la monnaie**

Dans tous les cas, les erreurs sont fortement non négligeables

- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

σ constante????

Dans B& S le prix du call est donné par

$$C_t = S_t N(d_1(t, S_t)) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2(t, S_t))$$

où

$$d_1(t, x) = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2(t, x) = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Ainsi, le **prix du call est une fonction strictement croissante de σ** car

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma}(t, x) = x\sqrt{T-t} N'(d_1) > 0.$$

σ constante????

Si on observe sur le marché le prix à t d'un call de maturité T et de strike K sur l'actif risqué (noté $C_t^{Obs}(x, T, K)$), il existe un unique réel σ^{impl} tel que

$$C_t^{Obs}(x, T, K) = C_t(x, T, K, \sigma^{impl}).$$

- Dans Black et Scholes, on devrait avoir en théorie $\sigma = \sigma^{impl}$.
- On observe en pratique que
 - La volatilité implicite est plus grande que la volatilité historique
 - La volatilité implicite dépend de la maturité et du strike de l'option.

σ constante????

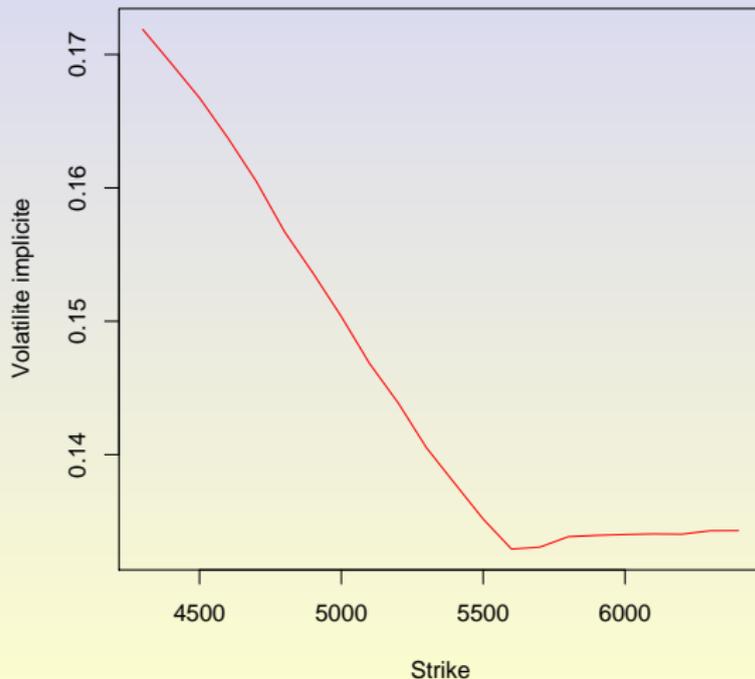
Volatilité implicite des Options d'Achat CAC 40 au 20/02/06 ($r=0.26$, $S_0 = 4979.94, \sigma = 0,1128$)

Feuille1

| | time to maturity | | | | | | | |
|------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | strike | | | | | | | |
| | 1.113889 | 1.369444 | 1.63 | 1.877778 | 2.130556 | 2.386111 | 2.641667 | 2.894444 |
| 4300 | 0.17118800 | 0.1180872 | 0.1412782 | 0.1569424 | 0.1772996 | 0.1379570 | 0.1509834 | 0.1551695 |
| 4400 | 0.1693352 | 0.123833 | 0.1423155 | 0.156994 | 0.175959 | 0.1403853 | 0.151775 | 0.155775 |
| 4500 | 0.1667453 | 0.127951 | 0.1436961 | 0.156894 | 0.173863 | 0.1416394 | 0.151947 | 0.156145 |
| 4600 | 0.1637445 | 0.130341 | 0.1433812 | 0.155533 | 0.171592 | 0.1425064 | 0.151657 | 0.156198 |
| 4700 | 0.1604914 | 0.130766 | 0.1434251 | 0.154099 | 0.169161 | 0.1436237 | 0.151893 | 0.156454 |
| 4800 | 0.1567087 | 0.130233 | 0.1430525 | 0.153148 | 0.167069 | 0.1437419 | 0.151874 | 0.156318 |
| 4900 | 0.1536131 | 0.129244 | 0.1420101 | 0.151047 | 0.165252 | 0.1438378 | 0.151576 | 0.155120 |
| 5000 | 0.1503522 | 0.127950 | 0.1422378 | 0.149164 | 0.163687 | 0.1432356 | 0.150590 | 0.153712 |
| 5100 | 0.1468152 | 0.126513 | 0.1416118 | 0.147050 | 0.160602 | 0.1418882 | 0.148873 | 0.152022 |
| 5200 | 0.1438910 | 0.125875 | 0.1396203 | 0.1458097 | 0.158098 | 0.1402739 | 0.146987 | 0.150157 |
| 5300 | 0.1405220 | 0.1251061 | 0.1375691 | 0.1440261 | 0.1551640 | 0.1384090 | 0.1449503 | 0.1481241 |
| 5400 | 0.1378352 | 0.1238243 | 0.1363240 | 0.1419141 | 0.1526249 | 0.1363659 | 0.1427853 | 0.1462835 |
| 5500 | 0.1351750 | 0.122793 | 0.1339192 | 0.1402914 | 0.1502293 | 0.1339684 | 0.140695 | 0.1446433 |
| 5600 | 0.1329235 | 0.1226654 | 0.1326092 | 0.137858 | 0.1475665 | 0.1320694 | 0.1381367 | 0.1432076 |
| 5700 | 0.1330680 | 0.120969 | 0.1316248 | 0.1364575 | 0.1462993 | 0.1309410 | 0.1357091 | 0.1442560 |
| 5800 | 0.1338469 | 0.121681 | 0.1316986 | 0.1356300 | 0.1455181 | 0.1298394 | 0.1337512 | 0.1447764 |
| 5900 | 0.1339526 | 0.1226752 | 0.1322775 | 0.1346902 | 0.1451121 | 0.1294071 | 0.1326645 | 0.1453501 |
| 6000 | 0.1340104 | 0.1231664 | 0.1333534 | 0.1337806 | 0.1443712 | 0.1284742 | 0.1316243 | 0.1459605 |
| 6100 | 0.1340580 | 0.1237174 | 0.1338832 | 0.1334040 | 0.1432292 | 0.1277277 | 0.1304652 | 0.1465696 |
| 6200 | 0.1340355 | 0.124408 | 0.1339973 | 0.133804 | 0.1426945 | 0.1270130 | 0.1296194 | 0.1467108 |
| 6300 | 0.1342950 | 0.124805 | 0.1345208 | 0.1338067 | 0.1421790 | 0.1265756 | 0.1290314 | 0.1473307 |
| 6400 | 0.1343029 | 0.125301 | 0.1349204 | 0.1342131 | 0.1408527 | 0.1259873 | 0.128116 | 0.1477508 |

σ constante????

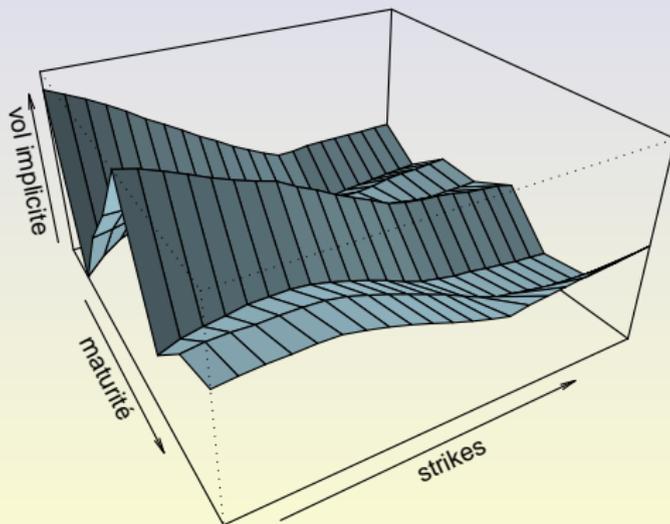
Smile de Volatilité (maturité=1.113889)



σ constante????

Surface de Volatilité

volimpliciteirfa.pdf



- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

La prophétie auto-réalisée

Fisher Black lui même ironisait sur le sujet:

“Les opérateurs savent maintenant utiliser la formule et les variantes. Ils l'utilisent tellement bien que les prix de marché sont généralement proches de ceux donnés par la formule, même lorsqu'il devrait exister un écart important...”

- 1 Pratique du modèle
 - Le modèle
 - Estimation de σ
 - simulation
 - Calcul des prix
- 2 Les grecques
 - Définition
 - Le cas du Call et du Put
 - Différences finies
 - Intégration par parties
 - Résultats numériques
- 3 Les limites du modèles
 - L'hypothèse log-normale
 - Performance de pricing
 - σ constante????
- 4 Remarques finales
 - La prophétie auto-réalisée...
 - Robustesse de la formule

Robustesse de la formule

Supposons que le prix d'un actif risqué soit donné par

$$dS_t = rS_t dt + \Sigma_t S_t dB_t$$

où Σ_t est un processus stochastique.

En dépit de ce modèle, un praticien utilise la formule de Black Scholes (avec $\sigma = \text{cste}$) pour construire son portefeuille (autofinancé) de couverture.

On a

$$V_t = \Delta_{BS}(t, S_t) S_t + \theta_t^0 S_t^0$$

et

$$dV_t = \Delta_{BS}(t, S_t) dS_t + \theta_t^0 dS_t^0.$$

Ainsi

$$dV_t = rV_t dt + \Delta_{BS}(t, S_t)(dS_t - rS_t dt)$$

avec condition initiale

$$V_0 = C_{BS}(0, S_0).$$

Robustesse de la formule

Ainsi en T l'erreur de couverture est

$$e_T = V_T - \underbrace{C_{BS}(T, S_T)}_{(S_T - K)_+}.$$

En utilisant la formule d'Itô

$$dC_{BS}(t, S_t) = \left(\frac{\partial C_{BS}}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2}(t, S_t) \Sigma_t^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial C_{BS}}{\partial x}(t, S_t) dS_t.$$

Mais l'EDP de Black Scholes assure

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial C_{BS}}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2}(t, x) = rC_{BS}(t, x).$$

Donc on a l'EDO

$$d(V_t - C_{BS}(t, S_t)) = r(V_t - C_{BS}(t, S_t))dt - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2}(t, S_t) (\Sigma_t^2 - \sigma^2) S_t^2 dt.$$

En résolvant (VDC) l'EDO on obtient

$$e_T = \frac{e^{rT}}{2} \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2}(t, S_t) (-\Sigma_t^2 + \sigma^2) S_t^2 dt..$$

Ainsi lorsque

$$\sigma \geq \Sigma_t \text{ a.s}$$

le praticien se **sur-couvre** (ce qui n'est pas catastrophique....)