Théorie des options

C. Chorro

17 Janvier 2008

Corrigé partiel des exercices RMS

Exercice 1 *On utilise le théorème fondamental en AOA.*

On veut montrer que $\mathbf{C_t} \leq \mathbf{S_t}$. *(même méthode pour* $P_t \leq Ke^{-r(T-t)}$*)*

On considère les deux portefeuilles suivants :

- *P1 : Un call*
- *P2 : Une action*

La valeur de ces portefeuilles à T *est*

- $V_1(T) = (S_T - K)_+$
- $V_2(T) = S_T$.

On a donc $V_2(T) \geq V_1(T)$ *(considérer les cas* $S_T \geq K$ *et* $S_T \leq K$*). Ainsi* $\forall t \in [0, T]$, $V_2(t) \geq V_1(t)$. *Ce qui donne le résultat.*

On veut montrer que $\mathbf{P_t} \leq \mathbf{Ke^{-r(T-t)}}$.

On considère les deux portefeuilles suivants :

- *P1 : Un put*
- *P2 :* Ke^{-rT} *euros (placés à la banque)*

La valeur de ces portefeuilles à T *est*

- $V_1(T) = (K - S_T)_+$
- $V_2(T) = K$.

On a donc $V_2(T) \geq V_1(T)$ *(considérer les cas* $S_T \geq K$ *et* $S_T \leq K$*). Ainsi* $\forall t \in [0,T]$, $V_2(t) \geq V_1(t)$*. Ce qui donne le résultat.*

On veut montrer que $\mathbf{C_t \geq Max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0)}$.
(même méthode pour $\mathbf{P_t \geq Max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0)}$*.)*

Ce qui revient à montrer que $\mathbf{C_t + Ke^{-r(T-t)} \geq S_t}$ *et* $\mathbf{C_t \geq 0}$*. (la deuxième inégalité est évidente.)*

Pour la première, on considère les deux portefeuilles suivants :

- *P1 : Un call et* Ke^{-rT} *euros (placés à la banque)*
- *P2 : Une action*

La valeur de ces portefeuilles à T *est*

- $V_1(T) = (S_T - K)_+ + K$
- $V_2(T) = S_T$.

On a donc $V_1(T) \geq V_2(T)$ *(considérer les cas* $S_T \geq K$ *et* $S_T \leq K$*). Ainsi* $\forall t \in [0,T]$, $V_1(t) \geq V_2(t)$*. Ce qui donne le résultat.*

Lorsque $K_1 \geq K_2$*, on veut montrer que* $\mathbf{C_t^{K_1} \leq C_t^{K_2}}$*. (même méthode pour le put)*

On considère les deux portefeuilles suivants :

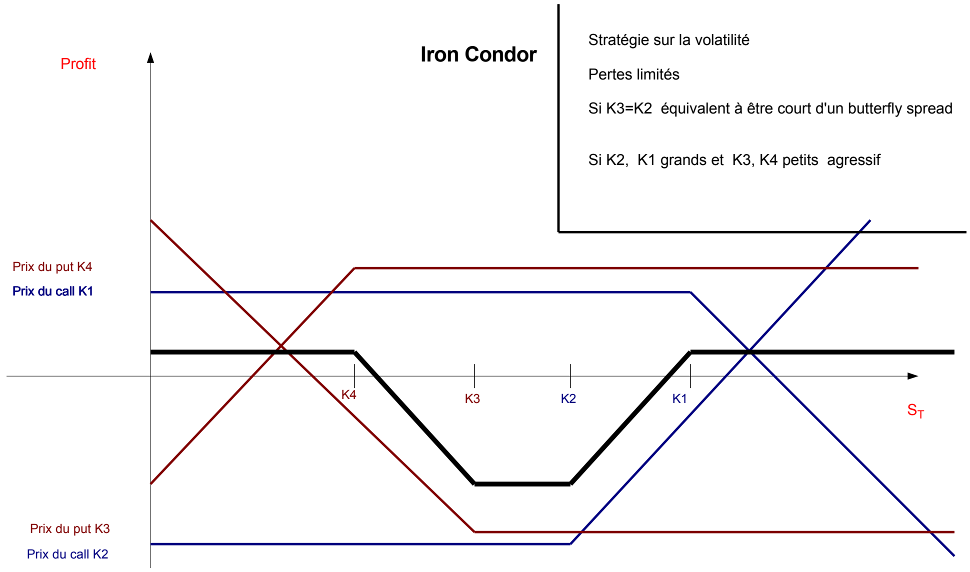
- *P1 : Un call de strike* K_1
- *P2 : Un call de strike* K_2

La valeur de ces portefeuilles à T *est*

- $V_1(T) = (S_T - K_1)_+$
- $V_2(T) = (S_T - K_2)_+$.

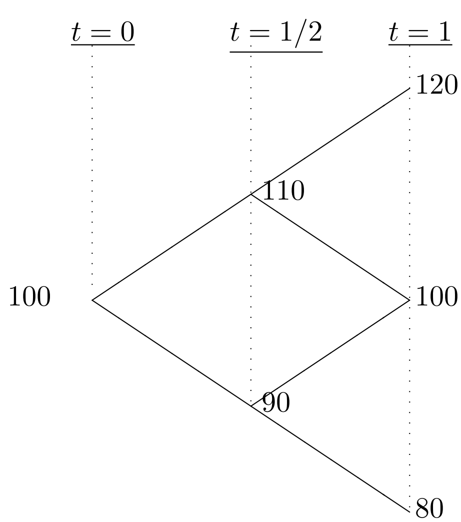
On a donc $V_2(T) \geq V_1(T)$*. Ainsi* $\forall t \in [0,T]$, $V_2(t) \geq V_1(t)$*. Ce qui donne le résultat.*

Exercice 2 *Je ne traite que l'Iron Condor*



Exercice 3 *On se place dans le cadre d'un modèle binomial à deux périodes ($t \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$). On considère que sur ce marché sont présents deux actifs financiers dont la dynamique est donnée par :*

$$S^0_0 = 1,\ S^0_{\frac{1}{2}} = e^{\frac{r}{2}},\ S^0_1 = e^r.$$

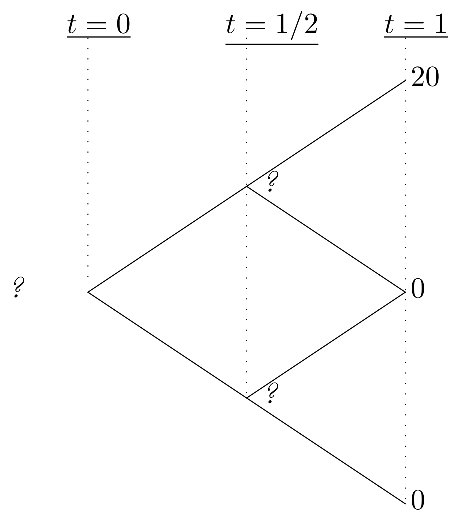


avec $r = 0$.

Je ne corrige que la question 1, les autres se traitant de la même manière.

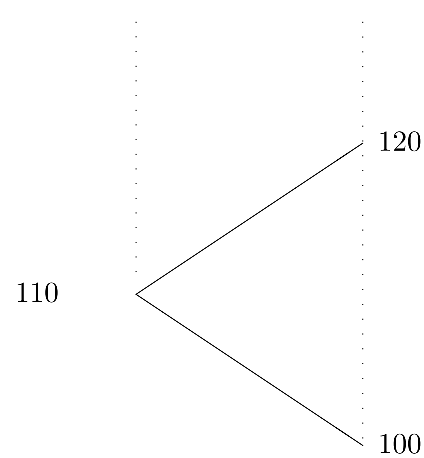
1) L'idée essentielle est de comprendre que le modèle deux périodes est équivalent à 3 modèles 1 période.

Le call de strike 100 *à evaluer admet la dynamique suivante :*

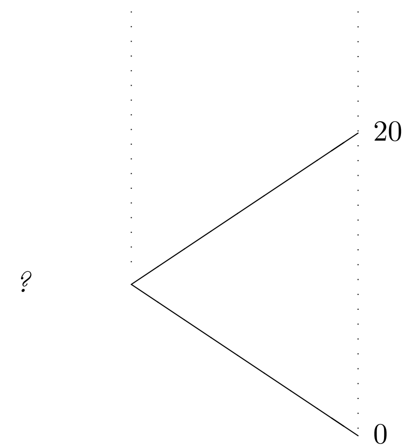


Trouver le prix revient à remplir l'arbre ci dessus.

On considère le premier sous marché suivant :



Dynamique de l'actif risqué lorsque le cours est monté à $t = \frac{1}{2}$

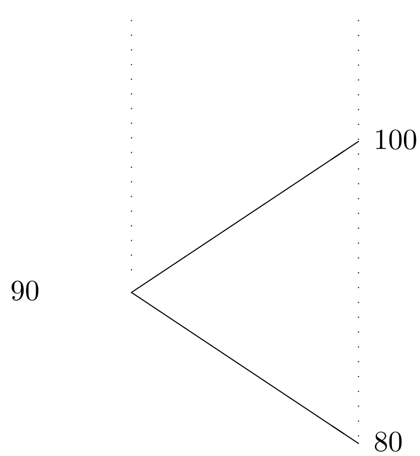


Dynamique du call lorsque le cours est monté à $t = \frac{1}{2}$

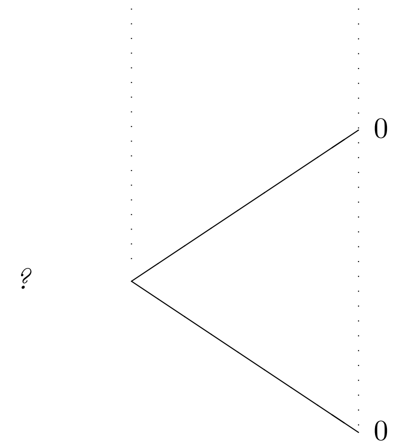
En appliquant les résultats du slide 65 *on trouve*

- *Prix : 10*
- *Quantité d'actif risqué dans le portefeuille de fabrication : 1*
- *Quantité d'actif sans risque dans le portefeuille de fabrication : -100*

On considère le deuxième sous marché suivant :



Dynamique de l'actif risqué lorsque le cours est descendu à $t = \frac{1}{2}$

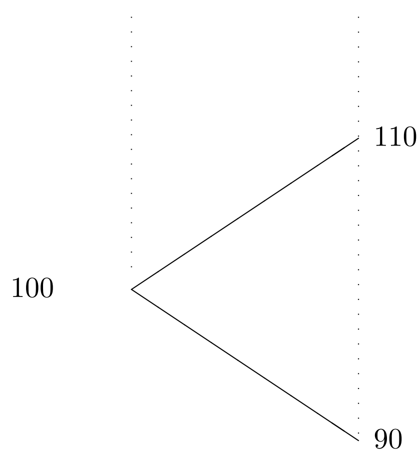


Dynamique du call lorsque le cours est descendu à $t = \frac{1}{2}$

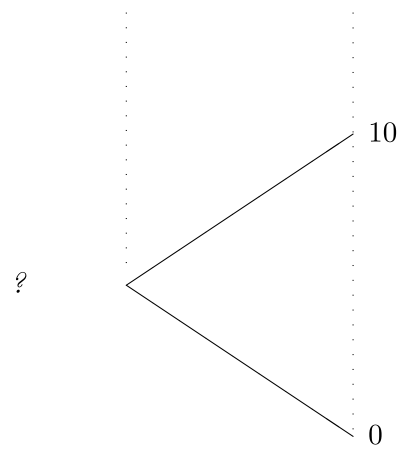
En appliquant les résultats du slide 65 *on trouve*

- *Prix : 0*
- *Quantité d'actif risqué dans le portefeuille de fabrication : 0*
- *Quantité d'actif sans risque dans le portefeuille de fabrication : 0*

Enfin, on considère le dernier sous marché :



Dynamique de l'actif risqué au départ

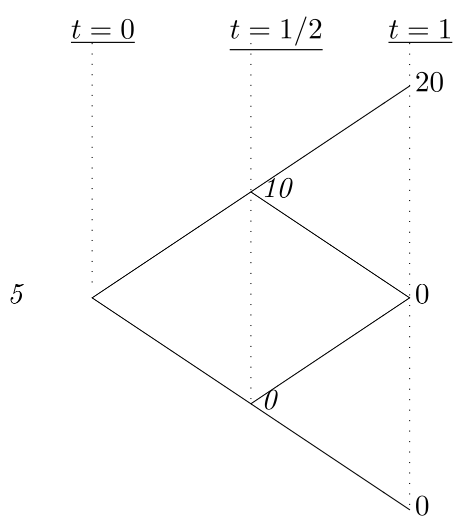


Dynamique du call au départ

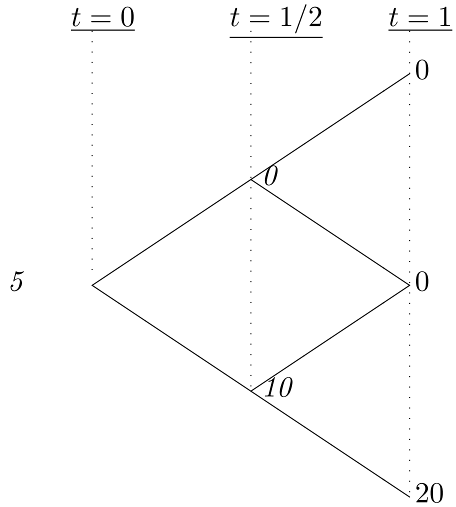
En appliquant les résultats du slide 65 *on trouve*

- *Prix : 5*
- *Quantité d'actif risqué dans le portefeuille de fabrication :* $\frac{1}{2}$
- *Quantité d'actif sans risque dans le portefeuille de fabrication : -45*

A final pour le prix du call on ontient



Pour trouver le prix du put de même strike il suffit d'appliquer la relation de parite call put (slide 46) et on trouve


$t=0$
$t=1/2$
$t=1$
0
0
5
0
10
20