

THÈSE de DOCTORAT

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paris 1
Panthéon-Sorbonne**

Discipline : **Mathématiques Appliquées**

présentée par

Christophe CHORRO

*

* *

**CALCUL D'ERREUR PAR FORMES DE DIRICHLET :
LIENS AVEC L'INFORMATION DE FISHER
ET LES THÉORÈMES LIMITES**

* *

*

Thèse soutenue publiquement le 9 Décembre 2005 devant le jury composé de

M. Nicolas BOULEAU	Professeur à l'Enpc	Directeur
M. Laurent DENIS	Professeur à l'Université d'Évry	Rapporteur
M. Nicolas PRIVAULT	Professeur à l'Université de La Rochelle	Rapporteur
M. Marco BIROLI	Professeur à l'Université de Milan	Examineur
M. Denis FEYEL	Professeur à l'Université d'Évry	Examineur
M. Michel EMERY	Directeur de recherche CNRS	Examineur

*À mes parents, À mon frère,
pour leur soutien sans faille*

*À Jean-Marie Exbrayat,
À Nicolas Savardel,*

Remerciements

Je tiens à saluer ici toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à faire de ces trois années de thèse une période extrêmement riche sur le plan personnel. Ces premiers pas dans la recherche ont été pour moi d'un grand enseignement. Je remercie tous ceux qui ont eu la volonté, la patience et parfois l'amitié de m'accompagner, de me conseiller dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Nicolas Bouleau qui a toujours su faire preuve, durant ces trois années, d'une grande disponibilité, d'une écoute et d'une générosité sans faille. Au delà de ses qualités mathématiques bien connues de tous, il a été pour moi un vrai plaisir d'effectuer mes débuts dans la recherche à ses côtés. Son implication a été la source d'une motivation constante, sa rigueur et sa créativité resteront un exemple.

Je souhaite remercier mes deux rapporteurs Laurent Denis et Nicolas Privat pour le temps et le soin qu'ils ont apportés à la lecture de ce manuscrit et à l'élaboration de leurs rapports. Je suis très heureux qu'ils aient accepté de s'acquitter de cette lourde tâche et je les remercie de l'intérêt porté à mon travail.

Je suis également très honoré de la présence dans mon jury de thèse de Michel Emery, Denis Feyel et Marco Biroli.

Les mathématiques ont été aussi pour moi l'occasion de voyager et de rencontrer plusieurs grands spécialistes de l'analyse sur l'espace de Wiener. Je pense tout particulièrement à David Nualart et Hiroshi Sugita, que je remercie pour leur accueil et leur gentillesse.

Je n'oublie évidemment pas tous ceux qui, au quotidien, m'ont permis de bénéficier d'un cadre de travail agréable et d'une ambiance chaleureuse. Je remercie Bernard Lapeyre, et à travers lui tous les membres du CERMICS, de m'avoir accueilli lors de ma première année de thèse. Une pensée particulière va à mes collègues du CERMSEM qui m'ont donné la possibilité de mener à bien mes projets de recherche et d'assouvir mon goût pour l'enseignement. Merci à ceux qui, autour d'un café, d'une cigarette ou d'un sandwich, ont toujours su introduire une bonne dose d'humour lors de nos longues journées de travail prouvant ainsi au jour le jour que les mathématiques n'ont rien d'une science froide et austère.

Il me serait très difficile, voir malhonnête, de passer sous silence le rôle fondamental qu'a joué mon ami Alexandre Marino dans l'élaboration de cette thèse. Depuis notre rencontre en classe préparatoire, au Lycée Joffre à Montpellier, nos parcours sont étrangement semblables. Le probabiliste que j'essaie de devenir refuse d'y voir une quelconque expression du hasard mais plutôt celle de l'amitié. Je tiens à lui exprimer ici toute ma gratitude.

Je tiens enfin à avoir une pensée particulièrement affectueuse pour mes parents, mon frère et ceux qui depuis de nombreuses années me couvent de leur amour ou de leur amitié. À tous, sincèrement, je dis merci.

Table des matières

0	Introduction	1
0.1	Le calcul d'erreur "à la Gauss"	3
0.2	Le langage des formes de Dirichlet	8
0.2.1	Définition	8
0.2.2	Exemples classiques	10
0.2.3	Phénomènes de propagation dans les structures d'erreur	11
0.3	Images et produits infinis de structures d'erreur	12
0.3.1	Notion de fermabilité	12
0.3.2	Image d'une structure d'erreur	14
0.3.3	Produits infinis de structures d'erreur	16
0.3.4	Systèmes projectifs de structures d'erreur	18
0.4	Dirichlet indépendance, convergence en loi de Dirichlet	21
0.4.1	Dirichlet indépendance	21
0.4.2	Convergence en loi de Dirichlet	22
0.5	Apport de la thèse	26
0.5.1	Chapitre 1 : Structures d'erreur et estimation paramétrique	26
0.5.2	Chapitre 2 : Domaine vectoriel d'une structure d'erreur	27
0.5.3	Chapitre 3 : Extension du théorème de la limite centrale dans les espaces de Hilbert	27
0.5.4	Chapitre 4 : Extensions du théorème de Donsker	27
0.6	Publications	28
	Appendice : Interprétation intuitive des structures d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck	29
	Bibliographie	31
1	Structures d'erreur et estimation paramétrique	33
1.1	L'identification fondamentale	35
1.1.1	Hypothèses du modèle régulier	35
1.1.2	Inégalité de Cramer-Rao	36
1.1.3	Un exemple : volatilité historique dans le modèle de Black-Scholes	39
1.2	Changements de variables : Cas injectif	41

1.2.1	Le cas injectif régulier	41
1.2.2	Le cas injectif non régulier	43
1.3	Cas non injectif	44
1.3.1	Protocole d'estimation de $\psi(\theta)$ lorsque ψ n'est pas injective	44
1.3.2	Γ_ψ^V comme borne d'estimation	45
1.3.3	Γ_ψ^V comme variance asymptotique	46
1.4	Structures produit	50
1.5	Le choix de la probabilité <i>a priori</i> ρ	53
	Appendice : Rappels de statistiques asymptotiques	55
	Bibliographie	59
2	Domaine vectoriel d'une structure d'erreur	61
2.1	L'opérateur gradient	62
2.1.1	Définition	62
2.1.2	L'opérateur de dérivation	63
2.2	Le domaine vectoriel	63
2.2.1	Définition	63
2.2.2	Stabilité du domaine vectoriel et calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$	64
2.2.3	Image généralisée d'une structure d'erreur	65
2.2.4	Structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener	66
2.2.5	Dirichlet indépendance	67
2.2.6	Convergence en loi de Dirichlet	69
2.3	Simulation de processus gaussiens	71
2.3.1	Première extension	72
2.3.2	Interprétation en termes de simulation	74
2.3.3	Deuxième extension	75
	Bibliographie	79
3	Extension du théorème de la limite centrale hilbertien	81
3.1	Résultat principal	82
3.2	Preuve du théorème 3.1.1	83
3.3	Conclusion et remarques	87
	Appendice : Lemmata	89
	Bibliographie	91
4	Extensions du théorème de Donsker	93
4.1	Premiers résultats de convergence	95
4.1.1	Convergence en loi de Y_n^h	95
4.1.2	Convergence en loi de Dirichlet au sens des marginales fini- dimensionnelles	98
4.1.3	Convergence en loi de Dirichlet	100

4.1.4	Le cas des processus gaussiens généraux	104
4.2	Le cas des intégrales multiples	106
4.3	Principe d'invariance de Lindeberg-Feller	110
	Bibliographie	113
5	Commentaires et perspectives	115
5.1	Information de Fisher et dimension infinie	115
5.2	Le cas des équations différentielles stochastiques	117
5.3	“Perturbations verticales” et théorèmes limites	117
	Bibliographie	121

Introduction

Considérons un modèle physique, économique ou financier dépendant de plusieurs paramètres observables (volatilité dans le modèle financier de Black-Scholes, débit d'un fleuve, nature du sol et topographie des berges dans un modèle de crue). Contrairement aux grandeurs entières, les paramètres continus sont inévitablement entachés d'une erreur due à l'imprécision de l'appareil de mesure, aux techniques d'arrondis ou tout simplement à l'entrée de l'expérimentateur dans le champ de l'expérience.

Pour un paramètre donné, nous pouvons alors classer les erreurs en deux grandes familles distinctes :

- a) Les erreurs systématiques qui se produiront de la même manière (en valeur absolue et en signe) lorsque les conditions de mesures sont identiques,
- b) Les erreurs accidentelles qui se produiront de manière imprévisible même lorsque les conditions sont similaires.

Les erreurs systématiques sont liées aux appareils de mesure utilisés et nous pouvons considérer qu'elles s'éliminent facilement par réglages ou par un mode opératoire adapté. En revanche, les erreurs accidentelles, dues notamment à l'opérateur et aux conditions de travail, sont inhérentes à tout protocole expérimental. Elles peuvent être vues comme l'agrégation de micro-phénomènes indépendants dont il faut tenir compte. Ceci implique des choix, des hypothèses simplificatrices car la connaissance parfaite est inatteignable.

Ces modèles sont de plus utilisés pour calculer des quantités significatives qui serviront comme aide à la prise de décision. Par exemple, dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on peut calculer la composition d'un portefeuille assurant la couverture d'une option et se positionner ensuite sur le marché. L'erreur associée à l'observation d'un paramètre va alors se propager à travers les calculs.

Le choix d'un langage pertinent pour parler des erreurs et de leur propagation est un sujet ancien qui a mobilisé de nombreux mathématiciens dès le début du 19ème siècle ([17], p.166). À l'heure actuelle, la pratique de la modélisation s'est généralisée et intensifiée dans tous les secteurs d'activité économique, notamment grâce au développement de l'informatique. Les modèles font appel à des techniques mathématiques de plus en plus raffinées pour rendre compte de la complexité. Une telle question demeure alors fondamentale.

La difficulté du problème est qu'il est soumis à une double contrainte. Un tel langage doit être suffisamment précis et rigoureux pour être significatif et suffisamment souple pour s'adapter aux nombreuses situations. En effet, l'étude d'un phénomène physique donne souvent lieu à de multiples approches basées sur des partis pris et des outils mathématiques très différents. Il est alors très important qu'un langage commun puisse confronter et critiquer les différents points de vue. Une réponse originale à ce problème a récemment été apportée par Nicolas Bouleau ([4],[5]) en utilisant la puissante théorie des formes de Dirichlet ([3],[11],[15]). En effet, les principaux opérateurs utilisés en théorie du potentiel (opérateur carré du champ, générateur infinitésimal) vérifient un calcul fonctionnel qui s'interprète en termes de propagation d'erreurs. Cette réponse, qui est le cadre théorique de la thèse, reprend deux idées historiques essentielles, déjà présentes dans les travaux pionniers de Gauss ([13]), et s'adapte parfaitement aux situations rencontrées en modélisation physique ou financière ([5], chap.7 et 8).

Plan de l'introduction : Le premier paragraphe rappelle brièvement deux idées fondatrices de la théorie des erreurs : supposer les erreurs aléatoires et petites. L'avantage étant d'utiliser la richesse du langage probabiliste et de permettre des simplifications par l'utilisation de développements limités. Ce parti pris, riche de conséquences, est apparu pour la première fois dans les travaux de Gauss dont nous exposons les grandes lignes et discutons les limites. Les paragraphes 2, 3 et 4 ont pour but de familiariser le lecteur avec la théorie du calcul d'erreur par les formes de Dirichlet qui s'avère être un puissant outil d'extension des idées de Gauss. L'objectif est de mettre en lumière la souplesse technique d'une telle approche et sa finesse pour rendre compte des erreurs et de leur propagation. Cette partie ne présente pas de résultats nouveaux, très peu de propositions sont démontrées. Nous avons fait le choix d'introduire les outils techniques utilisés dans les chapitres suivants en les illustrant d'exemples originaux liés à notre problématique. L'étude des formes de Dirichlet ayant donné lieu à une littérature très abondante, une présentation plus théorique ne nous est pas apparue nécessaire. Enfin, le dernier paragraphe présente les principaux résultats obtenus au cours de cette thèse. L'objectif principal a été de relier solidement le calcul d'erreur par les formes de Dirichlet à l'expérience. Deux voies complémentaires ont été abordées. Nous avons dans un premier temps exploré la connexion avec les statistiques paramétriques via la notion d'information de Fisher mettant ainsi en évidence une forte compatibilité entre les propriétés analytiques de la matrice d'information de Fisher et les opérations algébriques élémentaires liées au calcul d'erreur. Cette étude a été complétée par l'extension en termes de forme de Dirichlet de certains théorèmes limites fonctionnels de la théorie des probabilités (théorème de la limite centrale hilbertien, théorème de Donsker). De la même manière que l'utilisation de la loi normale en statistique s'explique en partie par le théorème de la limite centrale, nous avons mis en évidence l'importance d'une

famille de structures d'erreur par des arguments asymptotiques. En particulier, sur l'espace de Wiener, les résultats obtenus donnent une interprétation originale du calcul de Malliavin comme objet limite.

0.1 Le calcul d'erreur "à la Gauss"

Considérons une grandeur réelle c (par exemple la concentration d'un polluant dans une rivière) qui peut être connue grâce à des mesures. Le résultat de cette mesure est entaché d'une erreur que l'on notera dc . Lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière, on s'intéresse à l'erreur $d[f(c)]$ sur $f(c)$. Deux approches classiques sont alors possibles.

Approche probabiliste : Nous supposons que le couple (c, dc) est la réalisation de la variable aléatoire $(C, \Delta C)$. La description complète de cette situation nécessite la connaissance de la loi du couple $(C, \Delta C)$ à l'aide de moyens statistiques. Dans cette approche, les erreurs possèdent donc un biais et une variance ce qui permet de rendre compte des phénomènes fréquents de corrélations entre plusieurs grandeurs et leurs erreurs respectives (par exemple, plus le taux de pollution est élevé plus la mesure est difficile donc plus l'erreur est grande). Cependant, l'information contenue dans la loi du couple $(C, \Delta C)$ est beaucoup trop riche pour être atteignable expérimentalement. De plus, le phénomène de propagation des erreurs, i.e l'erreur sur $f(C)$, se traduit dans ce cas par un calcul de lois image qui est souvent difficile. Lorsqu'ils utilisent cette méthode, les praticiens sont souvent amenés à supposer que la loi conditionnelle des erreurs est gaussienne. Cette hypothèse, sous des conditions précisées par Gauss et affinées par Poincaré, revient à considérer que la meilleure approximation de C est la moyenne arithmétique des mesures ([5], p.14, [17], p.166). Les quantités $\mathbb{E}[\Delta C | C]$ et $var[\Delta C | C] = \mathbb{E}[(\Delta C - \mathbb{E}[\Delta C | C])^2 | C]$ concentrent alors toute l'information. Cependant, cette hypothèse est incompatible avec les changements de variables non linéaires et ne permet donc pas de traiter le problème de la propagation des erreurs.

Approche différentielle : Considérons simplement que l'erreur dc est petite ce qui rend le phénomène de propagation compatible avec les techniques du calcul différentiel classique. On obtient, en effet, la formule approchée suivante : $d[f(c)] = f'(c)dc$. Un des principaux avantages de cette méthode est de se transposer facilement en dimension infinie par l'utilisation de la dérivation au sens de Fréchet ou de Gâteaux. En revanche, le caractère déterministe des quantités considérées ne peut prendre en compte la corrélation.

Afin de combler le manque inhérent à chacune des formulations précédentes,

Gauss a été le premier à adopter une approche intermédiaire. Il suppose que les quantités sont aléatoires, que l'erreur est petite et montre que, dans ce cas, la variance conditionnelle de l'erreur vérifie une formule de propagation obtenue très simplement par développement limité. Nous adoptons ici la même démarche, en supposant, de plus, que l'erreur est décrite de manière satisfaisante par sa variance et son biais conditionnels. Nous faisons donc les hypothèses suivantes :

H₁ : La loi de la variable C et la quantité $var[\Delta C | C]$ sont connues et on suppose que $\mathbb{E}[\Delta C | C] = 0$ (cette dernière hypothèse signifiant qu'il n'y a pas d'erreur systématique sur C peut être omise par la suite en supposant que $var[\Delta C | C]$ et $\mathbb{E}[\Delta C | C]$ sont du même ordre de grandeur).

H₂ : On considère les erreurs petites ce qui nous permettra d'utiliser les règles de simplification d'usage. Ainsi, $\Delta C = \varepsilon Y$ où Y est une variable aléatoire que nous supposerons, pour simplifier les choses, bornée et ε un paramètre de calibration des erreurs.

On s'intéresse alors à la propagation des biais et des variances : Si f_1 est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^3 dont les dérivées sont bornées, de la formule de Taylor

$$\Delta(f_1(C)) = f_1(C + \Delta C) - f_1(C) = f_1'(C) \Delta C + \frac{1}{2} f_1''(C) (\Delta C)^2 + \varepsilon^3 o(1)$$

il résulte que

$$var[\Delta f_1(C) | C] = f_1''(C) var[\Delta C | C] + \varepsilon^3 o(1)$$

$$\mathbb{E}[\Delta f_1(C) | C] = \frac{1}{2} f_1''(C) var[\Delta C | C] + \varepsilon^3 o(1).$$

Ainsi, partant d'une situation où l'erreur est centrée, l'application d'une fonction non linéaire fait apparaître un biais. La variance, quant à elle, se propage en première approximation proportionnellement au carré de la pente. Ce phénomène est mis en évidence dans la figure ci-contre où les erreurs ont été supposées gaussiennes par commodité graphique. Lorsque l'on applique d'autres fonctions, les conclusions sont identiques : Soit $(f_i)_{i \geq 2}$ une suite de fonctions de même régularité que f_1 , on pose

$$b_0 = 0, \quad \sigma_0^2 = var[\Delta C | C],$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \mathbb{E}[\Delta g_n(C) | C], \quad \sigma_n^2 = var[\Delta g_n(C) | C]$$

où $g_n = f_n \circ \dots \circ f_1$.

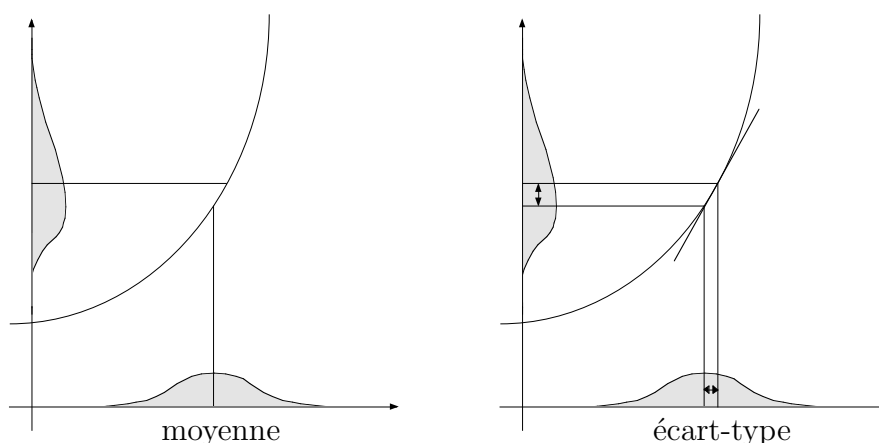


FIG. 1 – Transport des biais et des écarts type par une application non linéaire

En notant $x_n = g_n(C)$, on obtient de manière analogue les formules de propagation suivantes :

$$\sigma_n^2 = (f'_n)^2[x_{n-1}] \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon^3 0(1) \quad (1)$$

$$b_n = f'_n[x_{n-1}] b_{n-1} + \frac{1}{2} f''_n[x_{n-1}] \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon^3 0(1). \quad (2)$$

Il est bon de voir que la formulation précédente de propagation des biais et des variances conditionnels est très significative. Le calcul de variances est un calcul différentiel du premier ordre ne faisant intervenir que les variances alors que le calcul de biais est du second ordre et fait intervenir biais et variances. Ainsi, de manière assez surprenante, le calcul de variance est la première étape d'un calcul d'erreur basé sur des méthodes différentielles, ceci expliquera son importance dans le cadre de cette thèse.

En se plaçant sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, loi de C , on peut alors introduire l'opérateur Γ^C , appelé opérateur d'erreur quadratique, qui nous donne, pour chaque fonction f , la variance conditionnelle renormalisée de l'erreur sur $f(C)$:

$$\Gamma^C[f](x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{var}[\Delta f(C) \mid C = x]}{\varepsilon^2}.$$

Notons qu'au même titre que la variance en théorie des probabilités, Γ^C se polarise de la manière suivante

$$\Gamma^C[f, g](x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{covar}[\Delta f(C), \Delta g(C) \mid C = x]}{\varepsilon^2}$$

et si F est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} de classe C^2 dont les dérivées partielles sont bornées on a

$$\Gamma^C[F(f, g)] = F_1'^2(f, g)\Gamma^C[f] + F_2'^2(f, g)\Gamma^C[g] + 2F_1'(f, g)F_2'(f, g)\Gamma^C[f, g]. \quad (3)$$

Cette dernière relation fut découverte par Gauss en 1821 ([13]) et possède une propriété de cohérence (due aux propriétés de transport de l'opérateur différentiel sous-jacent) qui la rend supérieure aux formules présentes dans les manuels de l'époque. En effet, elle donne à la notion d'erreur une signification physique forte ([5], p.15) et permet de prendre en compte d'éventuelles corrélations par la présence de termes rectangles.

Nous pouvons alors proposer la définition (heuristique) suivante d'une structure d'erreur :

Une structure d'erreur est un espace de probabilité (W, \mathcal{W}, P) enrichi d'un opérateur Γ^C prenant en compte les erreurs. Cet opérateur agit sur les variables aléatoires et satisfait les propriétés suivantes :

a) Symétrie

$$\Gamma^C[f, g] = \Gamma^C[g, f],$$

b) Bilinéarité

$$\Gamma^C \left[\sum_i \lambda_i f_i, \sum_j \mu_j g_j \right] = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \Gamma^C[f_i, g_j],$$

c) Positivité

$$\Gamma^C[f, f] \geq 0,$$

d) Calcul fonctionnel du premier ordre sur les fonctions régulières (loi de propagation de Gauss)

$$\Gamma^C[F(f_1, \dots, f_n)] = \sum_{i,j} F_i'(f_1, \dots, f_n) F_j'(f_1, \dots, f_n) \Gamma^C[f_i, f_j].$$

Cette formulation possède l'avantage d'être très souple techniquement, elle se transporte simplement par les fonctions : si on se donne une application $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{loi de } \phi(C))$ on dispose de l'opérateur $\Gamma^{\phi(C)}$ qui

est l'opérateur d'erreur quadratique associé à l'observation de $\phi(C)$. Un petit calcul montre qu'il vérifie la relation fondamentale suivante :

$$\Gamma^{\phi(C)}[f](x) = \mathbb{E}[\Gamma^C[f(\phi)](C) \mid \phi(C) = x]. \quad (4)$$

De plus, dans le cadre de l'observation de grandeurs multi-dimensionnelles, ce langage est bien adapté. Par exemple, si C_1 et C_2 sont deux quantités munies de leurs structures d'erreur respectives $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{loi de } C_1, \Gamma^{C_1})$ et $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{loi de } C_2, \Gamma^{C_2})$, dans le cas où $(C_1, \Delta C_1)$ est indépendant de $(C_2, \Delta C_2)$, nous sommes en mesure de définir une structure d'erreur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \text{loi de } C_1 \otimes \text{loi de } C_2, \Gamma^{C_1 \otimes C_2})$ qui soit telle que $\Gamma^{C_1 \otimes C_2}$ est un opérateur d'erreur quadratique traduisant un phénomène de sommation des erreurs composante par composante. En effet, si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière, l'hypothèse d'indépendance nous assure que

$$\begin{aligned} \text{var}[\Delta(F(C_1, C_2)) \mid (C_1, C_2)] &= F_1'^2(C_1, C_2) \text{var}[\Delta C_1 \mid C_1] \\ &+ F_2'^2(C_1, C_2) \text{var}[\Delta C_2 \mid C_2] + \varepsilon^3 0(1) \end{aligned}$$

et donc

$$\Gamma^{C_1 \otimes C_2}[F](x, y) = \Gamma^{C_1}[F(., y)](x) + \Gamma^{C_2}[F(x, .)](y). \quad (5)$$

Notons qu'il est aussi possible, à l'aide de ce formalisme, de relaxer les hypothèses d'indépendance sur les couples $(C_1, \Delta C_1)$ et $(C_2, \Delta C_2)$ afin de prendre en compte les phénomènes de corrélation. Cela se traduit par l'apparition de termes rectangles dans (5).

Un exemple : On désire, dans cet exemple, mesurer sur un terrain au niveau, par des méthodes classiques d'arpentage, la distance entre un point A et un point C situés de part et d'autre d'un obstacle infranchissable (par exemple une rivière). On choisit pour cela un point B situé du même coté de l'obstacle que A . On mesure alors, à l'aide d'un mètre, la distance entre A et B notée l et, à l'aide, par exemple, d'un tachéomètre, les angles $\widehat{CAB} = \theta_1$ et $\widehat{ABC} = \theta_2$. La longueur AC se déduit de la relation trigonométrique suivante :

$$AC = \frac{l^2 \sin \theta_2}{\sin(\pi - (\theta_1 + \theta_2))}.$$

On suppose la longueur l bornée par un réel L et on introduit une structure d'erreur rendant compte des erreurs de mesure :

$$S = \left([0, L] \times [0, 2\pi]^2, \mathcal{B}([0, L] \times [0, 2\pi]^2), \frac{dl}{L} \frac{d\theta_1}{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi}, \Gamma \right)$$

avec, lorsque f est régulière,

$$\Gamma[f] = l^2 \left(\frac{\partial f}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \frac{\partial f}{\partial \theta_2}.$$

Le fait qu'il n'y ait pas de termes en $\frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial f}{\partial \theta_1}$ et en $\frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial f}{\partial \theta_2}$ dans l'expression de l'opérateur indique que l'erreur sur l est non corrélée avec les erreurs sur θ_1 et θ_2 (ce qui est normal car les mesures sont faites avec des instruments différents). Il y a en revanche une corrélation entre les erreurs sur θ_1 et θ_2 . De plus, l'erreur quadratique relative sur l est constante (plus la mesure est grande, plus l'erreur est grande) alors que l'erreur quadratique sur les angles est constante (l'erreur de mesure d'un angle n'est pas, en général, liée à sa valeur).

En utilisant le calcul fonctionnel, on peut calculer l'erreur induite sur la longueur AC et on trouve, en notant $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$,

$$\Gamma[AC] = \frac{l^2}{\sin^2 \theta_3} \left[\sin^2 \theta_2 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_3} + \frac{\sin^2 \theta_2}{\tan^2 \theta_3} - \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{\sin \theta_3 \tan \theta_3} \right].$$

Nous voyons, sur cet exemple, que le formalisme de Gauss est efficace lorsque l'on s'intéresse au calcul de l'erreur d'une fonction régulière des paramètres initiaux. Cependant, il arrive très souvent qu'une telle formulation soit impossible. C'est le cas notamment des quantités définies implicitement comme les intégrales ou les solutions d'équations différentielles ordinaires ou stochastiques. Dans ce cas fréquemment rencontré, un raffinement des idées de Gauss est nécessaire. De plus, si on considère une suite de grandeurs erronées $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si on connaît les erreurs sur les fonctions régulières de type $F(C_{i_1}, \dots, C_{i_n})$, on aimerait pouvoir en déduire l'erreur sur une fonction régulière d'un nombre infini de variables. Ceci est rendu possible grâce à l'outil d'extension suivant.

0.2 Le langage des formes de Dirichlet

0.2.1 Définition

L'axiomatique suivante a été introduite par Nicolas Bouleau ([4]), elle reprend l'apport essentiel de Gauss en l'inscrivant dans le cadre rigoureux et puissant de la théorie des formes de Dirichlet ([3],[11],[15]).

Par la suite $C^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^q) \cap Lip$ (resp. $C_K^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^q)$) désignera l'espace des fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^q de classe C^p et lipschitziennes (resp. à support compact).

Définition 0.2.1 *Dorénavant, une structure d'erreur sera un terme*

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$$

où (W, \mathcal{W}, P) est un espace de probabilité et Γ un opérateur bilinéaire, symétrique, positif, de domaine \mathbb{D} dense dans $L^2(P)$, à valeurs dans $L^1(P)$ et vérifiant :

- 1) le calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$: si $U \in \mathbb{D}^n$, $V \in \mathbb{D}^p$, pour tout $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$ et $G \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$ alors $(F(U), G(V)) \in \mathbb{D}^2$ et

$$\Gamma[F(U), G(V)] = \sum_{i,j} F'_i(U) G'_j(V) \Gamma[U_i, V_j] \quad P\text{-p.p.},$$

- 2) $1 \in \mathbb{D}$,
 3) la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ par $\mathcal{E}[F, G] = \frac{1}{2} \int_W \Gamma[F, G] dP$ est fermée au sens où le domaine \mathbb{D} , muni de la norme du graphe

$$\| \cdot \|_{\mathbb{D}} = (\| \cdot \|_{L^2(P)}^2 + \mathcal{E}[\cdot])^{\frac{1}{2}},$$

est complet.

On notera toujours $\Gamma[F]$ pour $\Gamma[F, F]$ et $\mathcal{E}[F]$ pour $\mathcal{E}[F, F]$.

La forme bilinéaire \mathcal{E} , introduite dans la définition précédente, est une forme de Dirichlet locale, au sens où $\forall U \in \mathbb{D}$, $\forall F, G \in C_K^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\text{Support}(F) \cap \text{Support}(G) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{E}[F(U), G(U)] = 0, \quad (6)$$

admettant Γ pour opérateur carré du champ ([3], p.16). Cette théorie a été initiée par Beurling et Deny ([2]) comme outil de la théorie du potentiel. Elle a reçue une interprétation probabiliste en terme de processus de Markov symétriques, grâce notamment aux travaux de Fukushima ([11], chap.4), Silverstein ([21]), Le Jan ([14]) et Ma et Röckner ([15]), créant ainsi un pont unique entre l'analyse et les probabilités. Elle permet, de plus, d'introduire un calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$ pour des fonctions du processus de Markov associé qui ne sont pas des semi-martingales. On sort alors du cadre classique du calcul d'Itô ([11]). Sur l'espace de Wiener, cette théorie est intimement liée au calcul de Malliavin ([16],[19]) qui a fourni un cadre puissant pour l'étude et la compréhension des équations différentielles stochastiques et des fonctionnelles de Wiener ([3],[22]) en étendant le raisonnement d'intégration par parties en dimension infinie. Enfin, sous des hypothèses topologiques reliant l'espace W et la tribu \mathcal{W} , une structure d'erreur définit naturellement une capacité sur W ([3], p.52) permettant le raffinement quasi-sûr des énoncés probabilistes classiques ([3], chap.7).

La propriété 1) reprend la formulation historique de Gauss sur la propagation des petites erreurs par les fonctions régulières et est à rapprocher de (3). Ainsi, lorsque $U = (U_1, \dots, U_n) \in \mathbb{D}^n$, la matrice $\underline{\Gamma}[U] = [\Gamma[U_i, U_j]]_{1 \leq i, j \leq n}$ doit être interprétée comme la matrice de variance-covariance des erreurs sur U conditionnellement à U . En utilisant (6), on peut voir ([3], p.31) que $1 \in \mathbb{D}$ implique $\Gamma[1] = 0$, il n'y a donc pas d'erreur sur les constantes, ce qui est intuitivement satisfaisant. La propriété 3) est la pierre angulaire de cette définition, elle constitue

l'amélioration principale de l'approche heuristique. Elle s'apparente à la notion de sigma-additivité en théorie des probabilités ([6]) en permettant le calcul des erreurs sur des quantités définies par des limites : Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X sont dans \mathbb{D} et vérifient $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ dans $L^2(P)$, si le couple $(X_n, \text{erreur sur } X_n)$ converge en un sens convenable, il converge forcément vers le couple $(X, \text{erreur sur } X)$. Cette propriété s'avère être indispensable pour l'étude de la sensibilité des modèles financiers, le cours des actifs étant modélisé par la solution d'une équation différentielle stochastique ([5], p.165).

Notons également que ce formalisme fournit, sans hypothèses supplémentaires, un calcul de biais. On peut associer à la forme de Dirichlet \mathcal{E} un unique opérateur auto-adjoint A ([3], chap.1, [11], chap.1), appelé générateur infinitésimal, de domaine $D(A) \subset \mathbb{D}$ et à valeurs dans $L^1(P)$ satisfaisant

$$A[F(U)] = F'(U)A[U] + \frac{1}{2}F''(U)\Gamma[U]$$

lorsque $U \in D(A)$, $\Gamma[U] \in L^2(P)$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec des dérivées bornées. Nous voyons que cette formule traduit une propagation des biais semblable à celle introduite dans l'équation (2).

Enfin, même si la définition précédente n'explique pas ouvertement la notion d'erreur elle-même (seules les notions dérivées de variance et de biais conditionnels sont axiomatisées), une interprétation en terme de germe de processus de Markov est possible ([5], p.138).

0.2.2 Exemples classiques

Nous illustrons notre définition par deux exemples classiques en dimension 1 tirés de [5], chap.3. D'autres exemples en dimension finie peuvent être trouvés dans [11], chap.1.

Exemple 1 : On prend $W = \mathbb{R}$, \mathcal{W} = la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P = \mathcal{N}(0, 1)$ la loi normale centrée réduite, $\mathbb{D} = H^1(P) = \{u \in L^2(P), u' \text{ au sens des distributions appartient à } L^2(P)\}$, $\Gamma[u] = u'^2$.

Le terme $(W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ est une structure d'erreur appelée structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} . Cette terminologie provient du fait que le générateur infinitésimal associé n'est autre que celui du processus de diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} .•

Exemple 2 : On prend $W = [0, 1]$, \mathcal{W} = la tribu borélienne $\mathcal{B}([0, 1])$, $P = dx$ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, $\mathbb{D} = H^1([0, 1]) = \{u \in L^2(dx), u' \text{ au sens des distributions sur }]0, 1[\text{ appartient à } L^2(dx)\}$, $\Gamma[u] = u'^2$.

Le terme $(W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ est une structure d'erreur appelée structure d'erreur standard sur $[0, 1]$.•

0.2.3 Phénomènes de propagation dans les structures d'erreur

Soit $(U_1, \dots, U_d) \in \mathbb{D}^d$. Contrairement au calcul d'erreur à la Gauss, nous allons voir que le calcul d'erreur par les formes de Dirichlet permet de calculer l'erreur sur $F(U_1, \dots, U_d)$ pour une fonction F peu régulière. Dans le cas $d = 1$ nous avons la proposition suivante ([5], p.42) :

Proposition 0.2.1 *Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne et $U \in \mathbb{D}$, alors, $F(U) \in \mathbb{D}$ et*

$$\Gamma[F(U)] = F'(U)\Gamma[U] \quad (7)$$

où F' est la dérivée de F (définie presque partout pour la mesure de Lebesgue).

Remarque 1 : La formule (7) est valide sans ambiguïtés. En effet, la propriété de fermeture de la forme \mathcal{E} assure le résultat général suivant appelé densité de l'énergie image : Si $U \in \mathbb{D}$, l'image par U de la mesure $\Gamma[U].P$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . La démonstration de ce résultat lorsque $U \in \mathbb{D}^d$, $d > 1$, est une conjecture fondamentale de la théorie des formes de Dirichlet qui a été prouvée dans le cas de nombreux exemples (notamment dans le cadre des exemples 1 et 2 précédents).•

En dépit de la remarque précédente, la propriété de fermeture nous assure, sous une hypothèse additionnelle, un calcul fonctionnel lipschitzien multi-dimensionnel ([5], p.43) :

Proposition 0.2.2 *Soit $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne et $U \in \mathbb{D}^d$. On montre alors que $F(U) \in \mathbb{D}$ avec, lorsque F est une contraction au sens où*

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|,$$

$$\Gamma[F(U_1, \dots, U_d)]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^d \Gamma[U_i]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Si on suppose, de plus, que la loi de U est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on a

$$\Gamma[F(U_1, \dots, U_d)] = \sum_{i,j=1}^d F'_i(U)F'_j(U)\Gamma[U_i, U_j]. \quad (9)$$

Remarque 2 : D'un point de vue intuitif, la relation (8) est très satisfaisante car il est naturel que l'application d'une fonction contractante réduise les erreurs. •

La stabilité du domaine d'une forme de Dirichlet par les fonctions lipschitziennes est tout à fait remarquable. Elle a notamment permis une étude approfondie des équations différentielles stochastiques, aussi bien en terme de régularité du flot que d'existence d'une densité pour la solution, sous des hypothèses très faibles sur les coefficients ([3], chap.4).

Dans le paragraphe suivant nous allons introduire deux opérations sur les structures d'erreur permettant d'accompagner la construction des espaces de probabilités tout en conservant la propriété de fermeture. Cette grande stabilité algébrique est nécessaire à l'étude des modèles aléatoires.

0.3 Images et produits infinis de structures d'erreur

Nous présentons tout d'abord la notion de fermabilité d'un opérateur qui permet le passage du calcul d'erreur "à la Gauss" à celui utilisant les formes de Dirichlet.

0.3.1 Notion de fermabilité

Fréquemment, le domaine \mathbb{D} de l'opérateur Γ ne peut être connu entièrement. Il est alors important de pouvoir exprimer la fermeture de la forme \mathcal{E} en utilisant seulement un sous espace de \mathbb{D} .

Définition 0.3.1 *Soit \mathcal{D} un sous espace vectoriel de $L^2(P)$. Une forme bilinéaire Q , symétrique, positive, définie sur $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ est dite fermable si pour toute suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{D} telle que $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ dans $L^2(P)$ et $Q[U_n - U_m] \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ alors $Q[U_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

Si la forme bilinéaire Q est fermable, un argument classique ([11], p.4) entraîne l'existence d'une forme bilinéaire, symétrique, positive et fermée, \mathcal{E} définie sur un domaine \mathbb{D} , telle que $\mathcal{D} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{E} = Q$ sur \mathcal{D} où \mathbb{D} est minimal pour l'inclusion. La forme \mathcal{E} est alors appelée la plus petite extension fermée de Q .

La définition suivante reprend, en un sens, la notion heuristique de structure d'erreur vue au paragraphe 1 avec un formalisme rigoureux.

Définition 0.3.2 *Un terme $(W, \mathcal{W}, P, \mathcal{D}, \Gamma)$ est appelé une pré-structure d'erreur si \mathcal{D} est un sous espace vectoriel dense de $L^2(P)$ et si Γ est un opérateur bilinéaire, symétrique, positif de $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ dans $L^1(P)$ qui satisfait le calcul fonctionnel de*

classe $C^\infty \cap Lip$: si $U \in \mathcal{D}^n$, $V \in \mathcal{D}^p$, pour tout $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$ et $G \in C^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$ alors $(F(U), G(V)) \in \mathcal{D}^2$ et

$$\Gamma[F(U), G(V)] = \sum_{i,j} F'_i(U) G'_j(V) \Gamma[U_i, V_j] \quad P\text{-p.p.}$$

Le résultat suivant nous sera très utile par la suite : une pré-structure d'erreur équipée d'une forme fermable s'étend en une structure d'erreur ([5], p.45).

Proposition 0.3.1 *Soit $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathcal{D}, \Gamma)$ une pré-structure d'erreur telle que la forme associée $\mathcal{E}[\cdot, \cdot] = \frac{1}{2} \mathbb{E}_P[\Gamma[\cdot, \cdot]]$ définie sur $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ soit fermable (on dira par abus de langage que S est fermable). Si on note \mathbb{D} le domaine de la plus petite extension fermée de \mathcal{E} alors $(W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ est une structure d'erreur appelée plus petite extension fermée de S .*

Nous présentons maintenant un résultat, dû à Hamza, qui apporte une réponse très satisfaisante au problème de la fermabilité des structures d'erreur en dimension 1 ([11], p.105). Malheureusement, son extension au cas multi-dimensionnel est encore au stade de la recherche et reste un problème fondamental de la théorie des formes de Dirichlet.

Si P est une probabilité sur \mathbb{R} , nous noterons $L^1_{loc}(P)$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles qu'il existe une suite $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ vérifiant $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \mathbb{R}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f|_{\Omega_n} \in L^1(P)$.

Proposition 0.3.2 *Considérons une probabilité P sur \mathbb{R} . On pose $\mathcal{D} = C^\infty_K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall u \in \mathcal{D}$, $\Gamma[u] = u^2 g$ où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive dans $L^1_{loc}(P)$. Alors, la forme $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mathbb{E}_P[\Gamma]$ est fermable si et seulement si la mesure $g.P$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx et si sa densité, notée a , s'annule dx -p.p. sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus R(a)$ où*

$$R(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}; \exists \varepsilon > 0 \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{dt}{a(t)} < \infty \right\}.$$

La proposition suivante donne une réponse partielle au problème de fermabilité en dimensions supérieures et s'avère très utile dans de nombreux exemples ([5], p.47).

Proposition 0.3.3 *Soit $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathcal{D}, \Gamma)$ une pré-structure d'erreur telle qu'il existe un opérateur $A : \mathcal{D} \rightarrow L^2(P)$ linéaire, symétrique et négatif vérifiant, $\forall u, v \in \mathcal{D}$, $\mathcal{E}[u, v] = - \langle Au, v \rangle_{L^2(P)}$, alors, S est fermable.*

Exemple 3 : On définit la pré-structure d'erreur suivante

$$S = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P, C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip, \Gamma)$$

où P est une loi normale centrée sur \mathbb{R}^d de matrice de covariance Σ inversible et diagonale. On note $(\sigma_i^2)_{1 \leq i \leq d}$ les termes diagonaux de Σ . On suppose, de plus, que $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$\Gamma[F] = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} a_{i,j}.$$

Afin d'assurer la symétrie et la positivité de Γ , les $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ sont des réels vérifiant $a_{i,j} = a_{j,i}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j \geq 0$.

Pour $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$, une simple intégration par parties donne la relation $\mathcal{E}[F] = -\mathbb{E}_P[A[F]F]$ où

$$A[F] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{2x_i}{\sigma_i^2} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) a_{i,j}.$$

La fermabilité de S est alors une conséquence de la proposition précédente. Notons que par changement de variables, nous avons un résultat analogue lorsque la matrice Σ n'est pas diagonale. L'inversibilité de Σ est, quant à elle, nécessaire (l'examen du cas $d = 1$ permet de s'en convaincre facilement).•

Nous allons voir, dans le paragraphe suivant, que l'une des applications de la proposition 0.3.1 est de permettre la définition de l'image d'une structure d'erreur par un élément de son domaine.

0.3.2 Image d'une structure d'erreur

Soit $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur et $U \in \mathbb{D}^d$. Nous allons définir l'image de S par U . Cette structure sera définie sur l'espace $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_*P)$, image de (W, \mathcal{W}, P) par U , où U_*P est la loi de U , c'est à dire la mesure telle que $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $U_*P(E) = P(U^{-1}(E))$. En suivant (4), on pose naturellement, $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$\Gamma_U[F](x) = \mathbb{E}_P[\Gamma[F(U)] \mid U = x].$$

Cette définition est légitime car la stabilité du domaine entraîne $F(U) \in \mathbb{D}$.

On déduit des propriétés de l'espérance conditionnelle que l'opérateur Γ_U est bilinéaire, symétrique et positif et vérifie le calcul fonctionnel de classe $C^\infty \cap Lip$. Le terme

$$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_*P, C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip, \Gamma_U)$$

est donc une pré-structure d'erreur. De plus, il est facile de voir que la forme $\mathcal{E}_U[F] = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{U_*P}[\Gamma_U[F]] = \mathcal{E}[F(U)]$ est fermable. En effet, si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$ telle que

$$\|F_n\|_{L^2(U_*P)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et } \mathcal{E}_U[F_n - F_m] \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0,$$

alors, $(F_n(U))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\| \cdot \|_{\mathbb{D}}$ et donc par fermeture $\| F_n(U) \|_{\mathbb{D}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\mathcal{E}_U[F_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

En vertu de la proposition 0.3.1, on a la définition suivante :

Définition 0.3.3 Soit $U_*S = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_*P, \mathbb{D}_U, \Gamma_U)$ la plus petite extension fermée de la pré-structure $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_*P, C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip, \Gamma_U)$. Cette structure d'erreur est appelée l'image de S par U ou la \mathbb{D} -loi de U .

Notons que, dans ce cas, les images ne sont pas limitées à des applications injectives.

Exemple 4 : On considère la structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} définie dans l'exemple 1,

$$S = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P, H^1(P), \Gamma[u] = u'^2)$$

où $P = \mathcal{N}(0, 1)$. On note F_P la fonction de répartition de P qui vérifie $F_P \in H^1(P)$. L'image de S par F_P est alors une structure d'erreur

$$([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), dx, \mathbb{D}_{F_P}, \Gamma_{F_P})$$

telle que, $\forall u \in \mathbb{D}_{F_P}$, $\Gamma_{F_P}[u] = \frac{1}{2\pi} e^{-(F_P^{-1})^2} u'^2$. Elle est appelée structure d'erreur pseudo-gaussienne sur $[0, 1]$.•

En généralisant la procédure précédente, nous pouvons étendre la définition 0.3.3 pour des variables à valeurs dans un espace mesurable quelconque.

Définition 0.3.4 Soit $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur, (E, \mathcal{G}) un espace mesurable et U une variable aléatoire de W dans E . On considère \mathcal{A} un sous espace vectoriel dense de $L^2(U_*P)$ tel que

- i) Si $G \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap Lip$ et $F \in \mathcal{A}$ alors $G(F) \in \mathcal{A}$,
- ii) $\forall F \in \mathcal{A}$, $F(U) \in \mathbb{D}$.

Ainsi, la pré-structure $(E, \mathcal{G}, U_*P, \mathcal{A}, \Gamma_{\mathcal{A}, U}[F] = \mathbb{E}_P[\Gamma[F(U)] | U])$ est fermable et possède une plus petite extension fermée $U_*^{\mathcal{A}}S = (E, \mathcal{G}, U_*P, \mathbb{D}_{\mathcal{A}, U}, \Gamma_{\mathcal{A}, U})$ appelée image de S par U par rapport à \mathcal{A} ou \mathbb{D} -loi de U par rapport à \mathcal{A} .

Remarque 3 : La définition précédente dépend, en général, de \mathcal{A} ([3], p.200) et lorsque $U \in \mathbb{D}^d$ et $\mathcal{A} = C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$, on retrouve la définition 0.3.3. Cependant, nous verrons au chapitre 2 que lorsque E est un espace de Banach séparable, une hypothèse naturelle permet de rendre ce choix canonique.•

0.3.3 Produits infinis de structures d'erreur

Les structures d'erreur ont la propriété d'être stables par produits infinis dénombrables. Cela permet notamment d'équiper les principaux espaces de dimension infinie rencontrés en modélisation stochastique (espace de Monte-Carlo, espace de Wiener, espace de Poisson) de structures d'erreur à partir des briques élémentaires que sont les structures d'erreur sur \mathbb{R} ([5], chap.6). Cette propriété est d'autant plus intéressante que le domaine de la structure produit obtenue est connu explicitement. C'est ce que nous voyons dans la définition suivante ([3], p.203) :

Définition 0.3.5 Soit $S_n = (W_n, \mathcal{W}_n, P_n, \mathbb{D}_n, \Gamma_n)$, $n \geq 1$, une famille de structures d'erreur. La structure d'erreur produit

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = \prod_{n=1}^{\infty} S_n$$

est définie par $(W, \mathcal{W}, P) = (\prod_{n=1}^{\infty} W_n, \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n, \otimes_{n=1}^{\infty} P_n)$,

$$\mathbb{D} = \{F \in L^2(P) \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour } \otimes_{j \neq n} P_j \text{ presque tout } w_1, \dots, w_{n-1}, w_{n+1}, \dots \\ x \in W_n \mapsto F(w_1, \dots, w_{n-1}, x, w_{n+1}, \dots) \in \mathbb{D}_n \text{ et } \int_W \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n[F] dP < \infty\}$$

et, $\forall F \in \mathbb{D}$,

$$\Gamma[F] = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n[F]$$

où l'opérateur Γ_n agit sur le n -ième variable de F .

Remarque 4 : Dans le cas $n = 2$, on note $S_1 \otimes S_2$ la structure produit. On obtient alors la relation $\Gamma[F](x, y) = \Gamma_1[F](\cdot, y)(x) + \Gamma_2[F](x, \cdot)(y)$ qui traduit une sommation des erreurs composante par composante à la manière de l'équation (5). Ainsi, la notion de structure produit exprime le fait que les applications coordonnées et leurs erreurs sont indépendantes. •

Exemple 5 : On considère la structure d'erreur sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ suivante où chaque facteur est donné par la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} :

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0, 1), H^1(\mathcal{N}(0, 1)), \gamma[u] = u'^2)^{\mathbb{N}}$$

S est appelée la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Elle est intimement liée à la construction du mouvement Brownien par randomisation d'un

espace de Hilbert et est compatible avec l'intégrale de Wiener. En effet, si on note $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les applications coordonnées de S , on obtient une famille de variables aléatoires i.i.d suivant la loi normale centrée réduite. On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1], dx)$ et on note $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H . Il est bien connu que le processus $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ défini par

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \chi_n(s) ds g_n$$

est un mouvement Brownien standard continu. Lorsque $f \in H$, on définit de même l'intégrale de Wiener de f en posant

$$\int_0^1 f(s) dB_s = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f(s) \chi_n(s) ds g_n.$$

D'après la définition 0.3.5, il est facile de voir que

$$\int_0^1 f(s) dB_s \in \mathbb{D} \text{ et } \Gamma \left[\int_0^1 f(s) dB_s \right] = \int_0^1 f^2(s) ds.$$

On déduit alors du calcul fonctionnel que, si $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$, si $(f_1, \dots, f_n) \in H^n$,

$$F \left(\int_0^1 f_1(s) dB_s, \dots, \int_0^1 f_n(s) dB_s \right) \in \mathbb{D} \quad (10)$$

$$\Gamma \left[F \left(\int_0^1 f_1(s) dB_s, \dots, \int_0^1 f_n(s) dB_s \right) \right] = \sum_{i,j} F'_i F'_j \int_0^1 f_i(s) f_j(s) ds. \quad (11)$$

On peut voir, de plus, que les propriétés précédentes caractérisent S parmi les structures d'erreur sur (W, \mathcal{W}, P) agissant à la manière de (11) sur les fonctions cylindriques régulières.

Dans [5], chap.7, Nicolas Bouleau utilise la structure S pour effectuer des calculs dans le cadre simple du modèle financier de Black-Scholes. Il s'intéresse à la sensibilité de grandeurs financières significatives associées au problème de couverture d'une option européenne (valeur du portefeuille de couverture, composition du portefeuille en actifs risqués) à des perturbations du mouvement Brownien. Les propriétés des formes de Dirichlet permettent alors de traiter le cas de payoff lipschitzien. Les résultats obtenus complètent le calcul des Grecques en rendant possible l'étude des corrélations entre les différentes grandeurs. Nous verrons, dans le chapitre 2, que les propriétés de S permettent en fait l'étude de modèles financiers faisant intervenir des processus de diffusion plus complexes tout en préservant la simplicité des calculs. ●

En s'inspirant de l'exemple précédent, on définit une famille de structures d'erreur qui s'avérera fondamentale dans cette thèse en apparaissant comme objet limite dans les résultats asymptotiques établis dans les deux derniers chapitres. Soit B un espace de Banach, $\mathcal{B}(B)$ sa tribu borélienne et B' son dual topologique.

Définition 0.3.6 *Une structure d'erreur $(B, \mathcal{B}(B), P, \mathbb{D}, \Gamma)$ sera dite de type Ornstein-Uhlenbeck si la mesure associée P est gaussienne et si l'opérateur Γ est un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients constants sur les fonctions cylindriques régulières i.e, $\forall n \geq 1, \forall F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (B')^n, F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{D}$ et*

$$\Gamma [F(\lambda_1, \dots, \lambda_n)] = \sum_{i,j} F'_i F'_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) a_{i,j} \quad (12)$$

où les coefficients $a_{i,j}$ dépendent uniquement du couple (λ_i, λ_j) .

Remarque 5 : La définition précédente est stable par produit dénombrable et par image linéaire.●

0.3.4 Systèmes projectifs de structures d'erreur

Pour clore cette section, nous présentons la notion de systèmes projectifs de structures d'erreur qui a été utilisée par Nicolas Bouleau pour étudier, grâce au calcul d'erreur par formes de Dirichlet, le phénomène de permanence des erreurs découvert par Poincaré ([4], [20], chap.6). Contrairement à la définition 0.3.5, cette notion permet notamment de prendre en compte, dans le cadre d'épreuves répétées, d'éventuelles corrélations.

Considérons une famille d'espaces mesurables $(W_i, \mathcal{W}_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble I qui n'est pas supposé dénombrable. On définit l'espace produit $W = \prod_{i \in I} W_i$ et la tribu produit $\mathcal{W} = \prod_{i \in I} \mathcal{W}_i$. On note \mathcal{I} l'ensemble des sous ensembles finis de I et on pose, pour $u \in \mathcal{I}$,

$$W_u = \prod_{i \in u} W_i \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_u = \prod_{i \in u} \mathcal{W}_i.$$

Si $u \subset v$ avec $u, v \in \mathcal{I}$, on note $\pi_{u,v}$ la projection canonique de W_v sur W_u et π_u la projection canonique de W sur W_u .

Nous voyons, dans la définition suivante, qu'une famille de structures d'erreur indexée par \mathcal{I} constitue un système projectif si certaines propriétés de compatibilités sont vérifiées.

Définition 0.3.7 Une famille de structures d'erreur $((W_u, \mathcal{W}_u, P_u, \mathbb{D}_u, \Gamma_u))_{u \in \mathcal{I}}$ est un système projectif de structures d'erreur si, $\forall u, v \in \mathcal{I}$ vérifiant $u \subset v$, $\forall f \in \mathbb{D}_u$, $f(\pi_{u,v}) \in \mathbb{D}_v$ et

$$(W_u, \mathcal{W}_u, P_u, \mathbb{D}_u, \Gamma_u) = (\pi_{u,v})_*^{\mathbb{D}_u}(W_v, \mathcal{W}_v, P_v, \mathbb{D}_v, \Gamma_v) \quad (13)$$

où la relation (13) est prise au sens de la définition 0.3.4. Cela implique, en particulier, l'égalité suivante

$$\mathcal{E}_u[f] = \mathcal{E}_v[f(\pi_{u,v})]$$

sur les formes de Dirichlet associées.

Supposons que le système projectif probabiliste $(W_u, \mathcal{W}_u, P_u)_{u \in \mathcal{I}}$ possède une limite notée (W, \mathcal{W}, P) (voir [18] pour les conditions classiques). On définit alors un sous espace dense de $L^2(P)$ en posant

$$\delta = \bigcup_{u \in \mathcal{I}} \mathbb{D}_{(u)} \quad \text{où} \quad \mathbb{D}_{(u)} = \{f(\pi_u); f \in \mathbb{D}_u\}.$$

On définit sur δ un opérateur Γ , bilinéaire, symétrique, positif, à valeurs dans $L^1(P)$ par la formule suivante : $\forall u \in \mathcal{I}$, $\forall f \in \mathbb{D}_u$,

$$\Gamma[f(\pi_u)] = \Gamma_u[f](\pi_u).$$

Les propriétés de compatibilités introduites dans la définition 0.3.7 légitiment l'écriture précédente (et dissipent toute ambiguïté). En effet, si $u \subset v$ avec $u, v \in \mathcal{I}$, si $h \in \mathbb{D}_{(u)} \cap \mathbb{D}_{(v)}$ on a $h = f(\pi_u) = g(\pi_v)$ et $\Gamma_u[f](\pi_u) = \Gamma_v[g](\pi_v)$. De plus, on peut voir aisément que l'opérateur Γ vérifie le calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$ ainsi $(W, \mathcal{W}, P, \delta, \Gamma)$ est une pré-structure d'erreur. On dira alors que le système projectif de structures d'erreur possède une limite si la pré-structure précédente est fermable (on dira aussi que le système projectif est fermable). Si on note \mathbb{D} le domaine de sa plus petite extension fermée, $(W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ est la structure d'erreur limite du système projectif et la propriété suivante est vérifiée :

$$(W_u, \mathcal{W}_u, P_u, \mathbb{D}_u, \Gamma_u) = (\pi_u)_*^{\mathbb{D}_u}(W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma).$$

Il existe des exemples ([3], p.207) de systèmes projectifs de structures d'erreur non fermables. Le cas des structures produit constitue, quant à lui, un exemple important où la limite existe et est connue explicitement.

Exemple 6 : Permanence des erreurs en simulation Monte-Carlo

On reprend ici les notations de l'exemple 1. Nous voulons calculer par la méthode de Monte-Carlo une intégrale de type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) dm(s)$ où m est une

loi normale centrée réduite et $f \in H^1(m)$. On génère pour cela un échantillon $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de m . On suppose les U_n erronées et nous allons voir, qu'en fonction des hypothèses de corrélation sur les erreurs, l'erreur sur la quantité $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k)$ a un comportement asymptotique différent.

Nous supposons, dans un premier temps, que les erreurs sont indépendantes et représentées, par exemple, par la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} . Dans ce cas, nous pouvons considérer que les U_n sont les applications coordonnées de la structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m, H^1(m), \gamma[u] = u'^2)^{\mathbb{N}^*}.$$

Un simple calcul donne $\Gamma \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k) \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f'^2(U_k)$ et donc

$$\Gamma \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad P\text{-p.p. et dans } L^1(P).$$

Utilisons maintenant le langage des systèmes projectifs pour introduire des corrélations entre les erreurs. Nous reprenons les notations de la définition 0.3.7. Soit $I = \mathbb{N}^*$, pour chaque $u \in \mathcal{I}$, on note $|u|$ le cardinal de u et on définit une pré-structure d'erreur

$$(W_u, \mathcal{W}_u, P_u, \mathcal{D}_u, \Gamma_u)$$

où $(W_u, \mathcal{W}_u, P_u) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)^{|u|}$, $\mathcal{D}_u = C^1(\mathbb{R}^{|u|}, \mathbb{R}) \cap Lip$ et, $\forall F \in \mathcal{D}_u$,

$$\Gamma_u[F] = \sum_{i,j \in u} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j}. \quad (14)$$

En vertu de l'exemple 3, la pré-structure précédente est fermable et on note \mathbb{D}_u le domaine de sa plus petite extension fermée. Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les applications coordonnées de W . Ainsi, la famille $(W_u, \mathcal{W}_u, P_u, \mathbb{D}_u, \Gamma_u)_{u \in \mathcal{I}}$ constitue un système projectif de structures d'erreur lié à la génération des U_n et permet de prendre en compte des co-erreurs car l'équation (14) possède des termes rectangles. De plus, en utilisant la proposition 0.3.3, nous pouvons voir que ce système projectif possède une limite $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$. Ainsi,

$$\Gamma \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k) \right] = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f'(U_k) \right)^2$$

et, d'après la loi des grands nombres, nous obtenons

$$\Gamma \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'(s) dm(s) \right)^2 \quad P\text{-p.p. et dans } L^1(P).$$

Dans ce cas, l'erreur sur la moyenne n'est pas, en général, évanescence. L'introduction de corrélations entre les erreurs modifie radicalement le comportement asymptotique.

Nous pouvons trouver dans [4] un exemple de système projectif fermable tel que l'erreur sur la moyenne soit évanescence. •

Dans la section suivante, nous introduisons sur le domaine d'une structure d'erreur une notion d'indépendance et de convergence qui étend l'indépendance et la convergence en loi des variables aléatoires en prenant en compte la forme de Dirichlet sous-jacente.

0.4 Dirichlet indépendance, convergence en loi de Dirichlet

Les définitions introduites dans cette section sont tirées de [3], chap.5. On considère une structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ qui sera fixée par la suite.

0.4.1 Dirichlet indépendance

Définition 0.4.1 Deux variables $U \in \mathbb{D}^p$, $V \in \mathbb{D}^q$ sont Dirichlet indépendantes si

$$U_*S \otimes V_*S = (U, V)_*S.$$

En d'autres termes, la \mathbb{D} -loi du couple (U, V) est égale au produit des \mathbb{D} -lois de U et V .

Nous avons alors le résultat de caractérisation suivant ([3], p.218) :

Théorème 0.4.1 Les variables aléatoires $U \in \mathbb{D}^p$ et $V \in \mathbb{D}^q$ sont Dirichlet indépendantes si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

- a) U et V sont indépendantes sur l'espace de probabilité (W, \mathcal{W}, P) .
- b) $\forall i, 1 \leq i \leq p, \forall j, 1 \leq j \leq q, \mathbb{E}_P[\Gamma[U_i, V_j]|U, V] = 0$ P - $p.p.$
- c) $\forall i, 1 \leq i \leq p, \mathbb{E}_P[\Gamma[U_i]|U, V] = \mathbb{E}_P[\Gamma[U_i]|U]$ P - $p.p.$
- d) $\forall j, 1 \leq j \leq q, \mathbb{E}_P[\Gamma[V_j]|U, V] = \mathbb{E}_P[\Gamma[V_j]|V]$ P - $p.p.$

Remarque 6 : Par les propriétés de l'espérance conditionnelle, les conditions a), b), c), d) sont vérifiées si on suppose a), b'), c'), d') où

- b') $\forall i, 1 \leq i \leq p, \forall j, 1 \leq j \leq q, \Gamma[U_i, V_j] = 0$.
- c') $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq p$, le couple $(U, \Gamma[U_i, U_j])$ est indépendant de V .
- d') $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq q$, le couple $(V, \Gamma[V_i, V_j])$ est indépendant de U .

On déduit immédiatement de cette remarque que les applications coordonnées d'une structure d'erreur produit sont Dirichlet indépendantes. •

0.4.2 Convergence en loi de Dirichlet

Définition 0.4.2 Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{D}^d converge en loi de Dirichlet s'il existe une structure d'erreur $\widehat{S} = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \nu, \widehat{\mathbb{D}}, \widehat{\Gamma})$ telle que :

- i) $(U_n)_*P \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu$ en loi i.e $\forall F \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \mathbb{E}_P[F(U_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} F(x) d\nu(x)$
- ii) $C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip \subset \widehat{\mathbb{D}}$ et $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip, \mathcal{E}[F(U_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \widehat{\mathcal{E}}[F]$.

Par commodité, nous dirons que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers \widehat{S} .

Remarque 7 : Cette notion de convergence est stable par les fonctions de classe $C^1 \cap Lip$: Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers S , si $\phi \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^q) \cap Lip$ alors $(\phi(U_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers ϕ_*S . •

Afin de démontrer un résultat de convergence en loi de Dirichlet, trois points sont donc à vérifier. Le point i), la convergence de la suite $(\mathcal{E}[F(U_n)])_{n \in \mathbb{N}}, \forall F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$, vers une limite notée $\widehat{\mathcal{E}}[F]$ et le fait que la forme bilinéaire, symétrique, positive définie sur $C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$ par $\widehat{\mathcal{E}}$ soit fermable et que sa plus petite extension fermée possède un opérateur carré du champ. Comme nous le verrons sur l'exemple suivant, la dernière condition peut ne pas être vérifiée alors que les deux premières le sont. Ainsi, la notion de convergence introduite est robuste dans le sens où elle conserve la propriété fondamentale de fermeture.

Exemple 7 : ([3], p.222) Soit $S = (\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), P = \mathcal{N}(0, 1), H^1(P), \Gamma[u] = u'^2)$ la structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} . On pose

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^x 1_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[}(t) dt.$$

Nous pouvons montrer aisément que la suite $(U_n)_*P$ converge en loi vers la masse de Dirac en 0 notée $\delta_{\{0\}}$ et que, $\forall F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap Lip, \mathbb{E}_P[\Gamma[F(U_n)]] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (F'(0))^2$.

La pré-structure d'erreur

$$(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), \delta_{\{0\}}, C^1 \cap Lip, F \mapsto F'^2)$$

n'est cependant pas fermable. En effet, il suffit pour cela de considérer une suite F_n dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap Lip$ telle que $F_n(0) = 0$ et $F'_n(0) = 1$. •

Exemple 8 : Convergence d'une intégrale du processus empirique

On considère la structure produit suivante où chaque facteur est donné par la structure d'erreur standard sur $[0, 1]$:

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = ([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], dx, H^1([0, 1]), u \mapsto u'^2)^{\mathbb{N}^*}.$$

On note U_n les applications coordonnées de S et on définit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, 1]$, $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{\{U_j \leq t\}}$, la fonction de répartition empirique des U_n . Lorsque $f \in H^1([0, 1])$, on s'intéresse à la convergence en loi de Dirichlet de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dZ_n(t)$ où $Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$, ainsi,

$$\int_0^1 f(t) dZ_n(t) = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(U_j) - \int_0^1 f(t) dt \right).$$

En notant $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ le mouvement Brownien standard sur $[0, 1]$ (défini comme dans l'exemple 5 par randomisation de $L^2([0, 1], dx)$ en choisissant pour les χ_n la base trigonométrique de $L^2([0, 1], dx)$), on définit le pont Brownien $(W_t)_{t \in [0, 1]}$ par $W_t = B_t - tB_1$. Le théorème de la limite centrale nous assure alors la convergence en loi de $\int_0^1 f(t) dZ_n(t)$ vers $\int_0^1 f(t) dW_t$. De plus, $\forall F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$\Gamma \left[F \left(\int_0^1 f(t) dZ_n(t) \right) \right] = F'^2 \left(\int_0^1 f(t) dZ_n(t) \right) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f'^2(U_j).$$

La symétrie de $\int_0^1 f(t) dZ_n(t)$ en les U_1, \dots, U_n nous assure que

$$2\mathcal{E} \left[F \left(\int_0^1 f(t) dZ_n(t) \right) \right] = \mathbb{E}_P \left[F'^2 \left(\int_0^1 f(t) dZ_n(t) \right) f'^2(U_1) \right]$$

et donc

$$2\mathcal{E} \left[F \left(\int_0^1 f(t) dZ_n(t) \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P \left[F'^2 \left(\int_0^1 f(t) dW_t \right) \right] \int_0^1 f'^2(t) dt.$$

Il reste, à présent, à identifier la structure d'erreur limite, si elle existe. Nous reprenons pour cela les notations de l'exemple 5. On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ d'une structure produit où chaque terme est une structure d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck avec un poids déterministe bien choisi :

$$\tilde{S} = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}), \tilde{P}, \tilde{\mathbb{D}}, \tilde{\Gamma}) = \prod_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0, 1), H^1(\mathcal{N}(0, 1)), \gamma[u] = (2\pi nu')^2).$$

Cette structure est étudiée dans [5], p.110. En utilisant ses propriétés, on a

$$\int_0^1 f(s) dW_s \in \tilde{\mathbb{D}} \text{ et } \tilde{\Gamma} \left[\int_0^1 f(s) dW_s \right] = \int_0^1 f'^2(t) dt.$$

Ainsi, en posant $\hat{S} = \left(\int_0^1 f(s) dW_s \right) * \tilde{S}$, la suite $\int_0^1 f(t) dZ_n(t)$ converge en loi de Dirichlet vers $\hat{S} \bullet$.

Nous donnons maintenant quelques résultats généraux de convergence en loi de Dirichlet.

Proposition 0.4.1 *Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers U dans \mathbb{D} alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers U_*S . De plus, dans ce cas particulier, la condition ii) de la définition 0.4.2 peut être étendue aux fonctions seulement lipschitziennes.*

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème suivant, spécifique à la dimension 1, qui est dû à Ancona ([1]).

Théorème 0.4.2 *Si $F \in Lip(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'application $V \in \mathbb{D} \mapsto F(V) \in \mathbb{D}$ est continue.*

Nous verrons, au chapitre 2, que la proposition 0.4.1 peut être étendue au cas multi-dimensionnel lorsque la structure d'erreur S vérifie une hypothèse supplémentaire.

Lorsque la limite \widehat{S} est de la forme U_*S avec $U \in \mathbb{D}^d$, on a le critère général suivant qui se déduit aisément du calcul fonctionnel.

Proposition 0.4.2 *Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{D}^d et $U \in \mathbb{D}^d$, $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq d$, on définit $\nu_{i,j}^n = (U_n)_* \Gamma[U_n^i, U_n^j].dP$ et $\nu_{i,j} = U_* \Gamma[U^i, U^j].dP$. La suite U_n converge en loi de Dirichlet vers U_*S si et seulement si la suite $(U_n)_*P$ converge en loi vers U_*P et $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq d$, la suite $\nu_{i,j}^n$ converge en loi vers $\nu_{i,j}$.*

Corollaire 0.4.1 *Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{D}^d et $U \in \mathbb{D}^d$, si U_n converge vers U en probabilité et si $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq d$, $\Gamma[U_n^i, U_n^j]$ converge vers $\Gamma[U^i, U^j]$ dans $L^1(P)$, alors, U_n converge en loi de Dirichlet vers U_*S .*

Utilisant cette notion de convergence, Bouleau et Hirsch ont proposé l'extension suivante du théorème de la limite centrale ([3], p.220). D'un point de vue pratique, ce résultat peut expliquer, en partie, l'importance des structures d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck en dimension finie.

Théorème 0.4.3 *Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires dans \mathbb{D}^p , Dirichlet indépendantes et de même \mathbb{D} -loi. Si on suppose que le vecteur $U_1 = (U_1^1, \dots, U_1^p)$ est centré, de matrice de covariance notée Σ alors, $V_n = \frac{U_1 + \dots + U_n}{\sqrt{n}}$*

converge en loi de Dirichlet vers $\widehat{S} = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \nu, \widehat{\mathbb{D}}, \widehat{\Gamma})$ où

- a) ν est une mesure gaussienne sur \mathbb{R}^d , centrée, de matrice de covariance Σ ,
- b) $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$, $F \in \widehat{\mathbb{D}}$ et $\widehat{\Gamma}[F] = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} a_{i,j}$ où $a_{i,j} = \mathbb{E}_P[\Gamma[U_1^i, U_1^j]]$.

Idée de la preuve : Le point i) de la définition 0.4.2 est une conséquence du théorème de la limite centrale sur \mathbb{R}^p . Pour le point ii), en utilisant le calcul fonctionnel et la caractérisation de la Dirichlet indépendance énoncée dans le théorème 0.4.1, on obtient, $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$2\mathcal{E}[F(V_n)] = \int_W \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i, j \leq p} \frac{\partial F}{\partial x_i}(V_n) \frac{\partial F}{\partial x_j}(V_n) \mathbb{E}_P[\Gamma[U_k^i, U_k^j] | U_k] dP. \quad (15)$$

En notant $m = (U_1)_*P$, l'hypothèse d'équi-distribution au sens de Dirichlet ramène la convergence de (15) à l'étude du comportement asymptotique de la suite de mesures ν_n définie comme étant l'image de la mesure

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{i,j}(y_k) dm(y_1) \dots dm(y_n),$$

où $a_{i,j}(x) = \mathbb{E}_P[\Gamma[U_1^i, U_1^j] | U_1 = x]$, par l'application $(y_1, \dots, y_n) \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}(y_1 + \dots + y_n)$. Le résultat est alors obtenu en étudiant les transformées de Fourier.

Il reste alors à démontrer la fermeture de la forme associée à $\widehat{\Gamma}$. L'aspect local de \mathcal{E} nous permettant de supposer Σ inversible, ce problème a été traité dans l'exemple 3. \square

Nous introduisons, enfin, une notion de convergence au sens de Dirichlet pour les processus stochastiques qui étend la convergence en loi au sens des marginales fini-dimensionnelles. La compatibilité des lois marginales est renforcée via la notion de système projectif. Une extension fonctionnelle de cette définition sera proposée au chapitre 2.

Définition 0.4.3 Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus réels indés par \mathbb{R}_+ telle que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, X_t^n \in \mathbb{D}$. On dit que la suite de processus converge en loi de Dirichlet au sens des marginales fini-dimensionnelles s'il existe une structure \widehat{S} sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ telle que, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$, l'application $\pi_{t_1, \dots, t_p} : w \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \mapsto (w(t_1), \dots, w(t_p))$ est dans $(\widehat{\mathbb{D}})^p$ et $(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_p}^n)$ converge en loi de Dirichlet vers $(\pi_{t_1, \dots, t_p})_* \widehat{S}$.

Remarque 8 : Afin de démontrer la convergence en loi de Dirichlet au sens des marginales fini-dimensionnelles d'une suite de processus $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ il faut donc prouver, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$, la convergence en loi de Dirichlet de $(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_p}^n)$ vers une structure d'erreur notée S_{t_1, \dots, t_p} et montrer que le système projectif défini par les S_{t_1, \dots, t_p} est fermable de limite \widehat{S} . \bullet

Une étude plus fine de l'exemple suivant sera effectuée au chapitre 2.

Exemple 9 : En reprenant les notations de l'exemple 5, on note \widehat{S} la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. La suite de processus sur $[0, 1]$ définie par

$$\sum_{k=0}^n \int_0^t \chi_k(s) ds g_k$$

converge en loi de Dirichlet au sens des marginales fini-dimensionnelles vers \widehat{S} . \bullet

0.5 Apport de la thèse

Dans [5], Bouleau a montré que le calcul d'erreur par les formes de Dirichlet possède une grande souplesse technique et est particulièrement bien adapté pour rendre compte des phénomènes de propagation d'erreur dans les modèles utilisés en finance stochastique et en physique. Cependant, le choix des hypothèses est effectué *a priori* en tenant compte essentiellement de la nécessité de mener les calculs à bien. De la même manière que le calcul des probabilités s'est naturellement vu enrichi de la théorie des statistiques pour modéliser des situations concrètes à travers des méthodologies rigoureuses (techniques d'échantillonnage, estimation paramétrique et fonctionnelle, théorie des tests), le but de cette thèse est d'amorcer une démarche analogue pour les structures d'erreur. Bien évidemment, les résultats obtenus ne fournissent pas une réponse exhaustive à ce problème complexe mais peuvent néanmoins conforter le praticien dans ses choix.

Cette thèse est composée de 4 parties, les résultats nouveaux sont principalement contenus dans les parties 1, 3 et 4. Le chapitre 2, quant à lui, présente quelques outils techniques, liés à la théorie des formes de Dirichlet, qui nous seront utiles dans les deux derniers chapitres.

0.5.1 Chapitre 1 : Structures d'erreur et estimation paramétrique

Une structure d'erreur étant un espace de probabilité muni d'un opérateur prenant en compte les erreurs, il est naturel de chercher à étendre l'identification statistique des lois de probabilité au cas des structures d'erreur. Ainsi, si θ est un paramètre inconnu à valeurs dans un ouvert Θ de \mathbb{R}^d , nous voulons mettre en place expérimentalement une structure d'erreur dans laquelle l'opérateur Γ exprime la précision de la connaissance que l'on a sur θ avec les moyens statistiques employés. Lorsque l'on estime θ à l'aide d'un modèle paramétrique régulier $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$, l'inégalité de Cramer-Rao nous conduit à poser l'identification fondamentale suivante : $\Gamma[Id] = J^{-1}$ où J est la matrice d'information de Fisher associée à $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Cela est bien naturel, Fisher lui-même présentait J comme une précision (intrinsic accuracy) sur le paramètre ([10]). Le but de cette partie est de tester la robustesse de cette identification. En ce qui concerne les changements de variables injectifs réguliers, on peut voir que la reparamétrisation induite sur le modèle se traduit par la notion de structure d'erreur image grâce aux propriétés analytiques de la matrice J . Dans le problème de l'estimation directe de la grandeur $\psi(\theta)$ lorsque ψ n'est pas injective, nous obtenons des résultats asymptotiques commodes pour les applications. Enfin, lorsque l'on s'intéresse à l'estimation de grandeurs produit, où les composantes sont estimées à l'aide d'expériences indépendantes, le phénomène

naturel de sommation des erreurs s'exprime dans la notion de structure d'erreur produit et ouvre la voie à une généralisation aux grandeurs infini-dimensionnelles.

0.5.2 Chapitre 2 : Domaine vectoriel d'une structure d'erreur

Dans ce chapitre, nous rappelons la notion de domaine vectoriel d'une structure d'erreur qui permet d'étendre la définition du domaine \mathbb{D} pour des variables à valeurs dans un espace de Banach séparable. Cette notion a été introduite par Feyel et de La Pradelle dans le cadre gaussien et s'adapte parfaitement à un cadre plus général (sous des hypothèses relativement faibles d'existence d'un opérateur gradient). Cet ensemble possède de remarquables propriétés (stabilité par les applications lipschitziennes, calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$) qui permettent aisément d'étendre, de manière canonique, les notions d'image, d'indépendance et de convergence en loi de Dirichlet pour les éléments du domaine vectoriel. Nous terminerons cette partie en traitant un exemple lié à la simulation des processus gaussiens par la méthode de Karhunen-Loève.

Nous disposons alors du matériel nécessaire pour proposer le raffinement, en termes de formes de Dirichlet, de deux grands théorèmes de la théorie des probabilités. Les résultats obtenus mettent en évidence le caractère fondamental des structures d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck (définition 0.3.6).

0.5.3 Chapitre 3 : Extension du théorème de la limite centrale dans les espaces de Hilbert

Le but de cette partie est d'étendre le théorème 0.4.3 au cadre hilbertien. Le résultat obtenu peut être vu comme limite projective (au sens de la définition 0.3.7) du résultat de Bouleau et Hirsch. La principale difficulté est de montrer la fermabilité de la forme obtenue à l'aide de méthodes hilbertiennes et de généraliser la technique d'intégration par parties utilisée dans la preuve du théorème 0.4.3.

0.5.4 Chapitre 4 : Extensions du théorème de Donsker

Dans [7], Nicolas Bouleau étudie l'approximation polygonale de Donsker sur $[0, 1]$

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1} \right)$$

lorsque les variables aléatoires $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont supposées erronées, les erreurs étant modélisées par des structures d'erreur. Il montre sous des hypothèses d'indépen-

dance et de stationnarité sur les erreurs, que le processus continu X_n converge en loi de Dirichlet vers la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. Ce chapitre est consacré à l'extension de ce résultat à certaines familles d'intégrales stochastiques du processus X_n . Trois cas seront envisagés.

Lorsque $h \in L^2([0, 1])$, la convergence en loi de Dirichlet de $Y_n^h = \int_0^1 h(s) dX_n(s)$ est obtenue sans hypothèses de régularité sur h . Ce résultat est complété par l'étude d'approximations continues de processus gaussiens réguliers (au sens de Delgado et Jolis ([8])) incluant le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0, 1[$. Enfin, on s'intéresse à la convergence de l'intégrale multiple

$$\int_{[0,t]^p} h(x_1, \dots, x_p) dX_n(x_1) \dots dX_n(x_p)$$

où h est donnée par une multi-mesure. Dans ce cas, une simple intégration par parties montre que l'intégrale multiple est donnée par un opérateur continu du processus X_n dont la régularité est compatible avec le calcul d'erreur.

Notons enfin que d'un point de vue purement probabiliste, les résultats obtenus sortent du cadre généralement employé dans la littérature.

0.6 Publications

Le contenu de cette thèse a fait l'objet des publications et pré-publications suivantes :

N. BOULEAU, C. CHORRO : *Error structures and parameter estimation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338** (2004), no. 4, 305–310.

N. BOULEAU, C. CHORRO : *Error structures and parameter estimation*, Cahiers de la mse série bleue (2004), no. 79, 19 pages.

C. CHORRO : *On an extension of the central limit theorem to Dirichlet forms*, Cahiers de la mse série bleue (2004), no. 80, 16 pages (soumis pour publication).

C. CHORRO : *Convergence in Dirichlet law of certain stochastic integrals*, Electron. J. Probab. **10** (2005), 1005–1025.

Appendice : Interprétation intuitive des structures d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck

Même si l'importance des structures d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck (définition 0.3.6) sera mise en évidence d'un point de vue théorique dans les chapitres 3 et 4, nous en donnons, dès à présent, une interprétation intuitive à la lumière de considérations empiriques fondamentales découvertes par Gauss. Par souci de concision, nous nous restreignons au cas $B = \mathbb{R}$.

Supposons, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, que l'on ait effectué n mesures indépendantes $X_1^\varepsilon, \dots, X_n^\varepsilon$ d'une grandeur réelle C (le paramètre $\varepsilon > 0$ indiquant la précision de ces mesures). Considérons, alors, que la meilleure valeur à donner à C en fonction des observations est $\frac{X_1^\varepsilon + \dots + X_n^\varepsilon}{n}$. Un argument dû à Gauss ([12]) et raffiné par Poincaré ([20], chap.10) nous assure que, sous des hypothèses assez larges, la loi conditionnelle de l'erreur $C - X_i^\varepsilon$ sachant C est une loi normale centrée de variance notée ε^2 . Ce résultat très naturel témoigne de l'absence d'erreurs systématiques (la mesure étant centrée sur la grandeur). De plus, l'hypothèse gaussienne confirme, quant à elle, que l'erreur accidentelle peut être vue comme la somme de nombreuses micro-erreurs indépendantes.

Lorsque le paramètre de précision ε tend vers 0, l'erreur commise devient infinitésimale et nous avons, en reprenant la définition heuristique donnée dans le paragraphe 1,

$$\Gamma^C[f](x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[(f(X_i^\varepsilon) - f(C))^2 | C = x]}{\varepsilon^2} = f'^2(x)$$

lorsque f est régulière.

L'opérateur Γ^C est alors un opérateur différentiel du premier ordre à coefficient constant qui traduit une hypothèse gaussienne sur l'erreur.

Pour rendre l'argument ci-dessus compatible avec le calcul d'erreur par les formes de Dirichlet, nous devons affiner les hypothèses. Considérons un processus $(X^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ représentant la mesure de la grandeur C et indexé par un paramètre de précision ε . Nous supposons que, $\forall \varepsilon > 0$, la loi conditionnelle de X^ε , sachant $C = x$, est une loi normale de moyenne $x e^{-\frac{\varepsilon}{2}}$ et de variance $1 - e^{-\varepsilon}$. Ainsi, pour ε tendant vers 0, la mesure est centrée sur la grandeur et l'erreur infinitésimale. Ce choix particulier est riche de conséquences. En effet, $(X^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ peut être vu comme la réalisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R}_+ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX^\varepsilon = dB_\varepsilon - \frac{1}{2}X^\varepsilon d\varepsilon$$

$$X_0 = C.$$

Lorsque C suit une loi normale centrée réduite, on peut associer, de manière canonique ([5], p.26), une structure d'erreur à ce processus qui n'est autre que la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} . L'opérateur Γ^C vérifie alors

$$\Gamma^C[f] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[(f(X^\varepsilon) - f(C))^2 | C = x]}{\varepsilon} = f'^2(x).$$

Ainsi, d'un point de vue heuristique, l'importance des structures d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck provient du caractère gaussien des hypothèses sur la grandeur et son erreur dont Gauss a été le premier à démontrer la pertinence expérimentale.

Bibliographie

- [1] A. Ancona, Continuité des contractions dans les espaces de Dirichlet, in *Séminaire de Théorie du Potentiel de Paris, No. 2 (Univ. Paris, Paris, 1975–1976)*, 1–26. Lecture Notes in Math., 563, Springer, Berlin.
- [2] A. Beurling and J. Deny, Espaces de Dirichlet. I. Le cas élémentaire, *Acta Math.* **99** (1958), 203–224.
- [3] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter, Berlin, 1991.
- [4] N. Bouleau, Calcul d’erreur complet lipschitzien et formes de Dirichlet, *J. Math. Pures Appl. (9)* **80** (2001), no. 9, 961–976.
- [5] N. Bouleau, *Error calculus for finance and physics : the language of Dirichlet forms*, de Gruyter, Berlin, 2003.
- [6] N. Bouleau, Some remarks on axiomatized languages and extension tools : focus on probability theory and error calculus with Dirichlet forms, *Butl. Soc. Catalana Mat.* **18** (2003), no. 2, 25–37.
- [7] N. Bouleau, Théorème de Donsker et formes de Dirichlet, *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), no. 5, 369–380.
- [8] R. Delgado and M. Jolis, Weak approximation for a class of Gaussian processes, *J. Appl. Probab.* **37** (2000), no. 2, 400–407.
- [9] D. Feyel and A. de La Pradelle, Espaces de Sobolev Gaussiens, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **39** (1989), no. 4, 875–908.
- [10] R.A. Fisher, Theory of statistical information, *Proc. Cambridge Philo. Soc.* **22** (1925).
- [11] M. Fukushima, Y. Ōshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter, Berlin, 1994.
- [12] F. Gauss, *Theoria motus corporum coelestium*, 1809.
- [13] F. Gauss, *Theoria combinationis*, 1821.
- [14] Y. Le Jan, Dual Markovian semigroups and processes, in *Functional analysis in Markov processes (Katata/Kyoto, 1981)*, 47–75, Lecture Notes in Math., 923, Springer, Berlin.

- [15] Z. M. Ma and M. Röckner, *Introduction to the theory of (nonsymmetric) Dirichlet forms*, Springer, Berlin, 1992.
- [16] P. Malliavin, Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, in *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*, 195–263, Wiley, New York.
- [17] J. Molk, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Tome 1, Vol.4, Editions Jacques Gabay, 1993.
- [18] J. Neveu, *Discrete-parameter martingales*, Translated from the French by T. P. Speed., Revised edition, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [19] D. Nualart, *The Malliavin calculus and related topics*, Springer, New York, 1995.
- [20] H. Poincaré, *Calcul des probabilités*, Ed. Paris, 1896.
- [21] M. L. Silverstein, *Symmetric Markov processes*, Lecture Notes in Math., 426, Springer, Berlin, 1974.
- [22] S. Watanabe, *On stochastic differential equations and Malliavin calculus*, Tata Institute of Fundamental Research, Vol. 73, Springer-Verlag, 1979.

Chapitre 1

Structures d'erreur et estimation paramétrique

Les résultats de ce chapitre, obtenus en collaboration avec Nicolas Bouleau, ont fait l'objet d'une note aux C.R.A.S ([5]).

Classiquement, la loi de probabilité ρ d'un phénomène physique peut être connue concrètement grâce à des expériences statistiques. Notons que dans ce cas, la propriété de σ -additivité de ρ ne saurait résulter de l'observation mais est une hypothèse mathématique de modélisation d'une grande fécondité ([4]). Une structure d'erreur $(W, \mathcal{W}, \rho, \mathbb{D}, \Gamma)$ étant un espace de probabilité muni d'un opérateur gérant les erreurs, nous nous posons, dans ce chapitre, la question bien naturelle de la détermination empirique d'une structure d'erreur. L'opérateur Γ associé devra vérifier, *a priori*, la propriété de fermeture (qui ne saurait résulter de l'expérience), condition très importante pour les déductions que l'on peut faire grâce au calcul d'erreur.

Donnons nous une grandeur θ à valeurs dans un ouvert Θ de \mathbb{R}^d . Nous supposons que θ est la réalisation d'une variable aléatoire $V : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \Theta$ dont la loi de probabilité ρ est choisie par des considérations à la fois expérimentales et pratiques ([12], p.225). Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable (E, \mathcal{F}) . On note P_θ la loi conditionnelle de X sachant $V = \theta$. De manière classique, on peut utiliser, pour estimer θ , le modèle $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ associé à l'observation de X . Nous voulons alors munir l'espace des paramètres Θ d'une structure d'erreur

$$S^V = (\Theta, \mathcal{B}(\Theta), \rho, \mathbb{D}^V, \Gamma^V)$$

qui soit telle que l'opérateur Γ^V exprime la précision de la connaissance que l'on a sur θ avec les moyens statistiques employés.

Notre approche consiste, dans des conditions précisées par la suite, à identifier Γ^V à l'inverse de la matrice d'information de Fisher qui, pour les modèles statis-

tiques paramétriques réguliers, est une mesure de la connaissance disponible. Ceci est bien naturel, Fisher lui-même présentait cette matrice comme une précision (intrinsic accuracy) sur le paramètre ([7]).

Plan du chapitre 1 : Dans la partie 1, nous rappelons les hypothèses classiques sur les modèles statistiques paramétriques permettant la définition de la matrice d'information de Fisher et l'obtention de l'inégalité de Cramer-Rao. L'interprétation de cette inégalité en termes de précision sur le paramètre nous conduit à définir une pré-structure d'erreur (définition 0.3.2) dont l'opérateur carré du champ traduit l'erreur d'estimation. Cette procédure est appelée l'identification fondamentale. Nous donnons, enfin, des conditions sur la matrice d'information de Fisher et sur la loi *a priori* ρ pour que cette pré-structure soit fermable. La partie 2 est consacrée à l'étude de la stabilité de l'identification fondamentale vis à vis des changements de variables injectifs. Dans ce cas, la reparamétrisation induite sur le modèle statistique se traduit par la notion de structure d'erreur image grâce aux propriétés analytiques de l'information de Fisher. Ce résultat est complété, dans la partie 3, par l'examen du cas non injectif en liaison avec les statistiques asymptotiques. Dans la partie 4, nous abordons la question de l'estimation de grandeurs produits. Ainsi, lorsque les composantes sont estimées à l'aide d'expériences indépendantes, le phénomène de sommation des erreurs s'exprime tout naturellement dans la notion de produit de structures d'erreur. Finalement, nous discutons, dans la dernière partie, du choix de la loi *a priori* ρ .

1.1 L'identification fondamentale

Nous rappelons, dans un premier temps, les conditions techniques à imposer sur le modèle $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ pour obtenir un contrôle des procédures d'estimation.

1.1.1 Hypothèses du modèle régulier

Dans la suite, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignera le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^d et $\| \cdot \|$ la norme correspondante. Nous allons supposer dorénavant que le modèle paramétrique $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ vérifie les hypothèses du modèle régulier :

- a) Θ est un ouvert de \mathbb{R}^d .
- b) Il existe une mesure σ -finie μ sur (E, \mathcal{F}) telle que, $\forall \theta \in \Theta$, P_θ soit absolument continue par rapport à μ de densité $f(\cdot, \theta)$ strictement positive.
- c) La fonction $\theta \mapsto f(x, \theta)$ est continue en tout point et ce pour μ presque tout x .
- d) On note $g(x, \theta) = \sqrt{f(x, \theta)}$. On suppose l'existence d'une fonction $\phi : E \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que, $\forall \theta \in \Theta$,

$$\int_E \|\phi(x, \theta)\|^2 d\mu(x) < \infty$$

et

$$\int_E |g(x, \theta + h) - g(x, \theta) - \langle \phi(x, \theta), h \rangle|^2 d\mu(x) = \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

En notant $\phi(x, \theta)^t$ la transposée de $\phi(x, \theta)$, on peut alors définir

$$J(\theta) = 4 \int \phi(x, \theta) \phi(x, \theta)^t d\mu(x) \tag{1.1}$$

qui est la matrice d'information de Fisher de notre modèle.

- e) $\theta \mapsto \phi(\cdot, \theta)$ est continue dans $L^2(\mu)$.
- f) Le modèle est identifiable : $\theta \mapsto P_\theta$ est injective.

Discussion des hypothèses :

La définition du modèle régulier que nous proposons ici est tirée de [10], p.65, et fait apparaître les conditions les plus générales de la littérature. Les hypothèses clef sont celles qui vont permettre la dérivation sous le signe somme nécessaire à l'obtention de l'inégalité de Cramer-Rao. On peut trouver dans [1] une définition alternative imposant des conditions de dérivabilité au sens usuel et présupposant la continuité de J alors qu'elle est ici une conséquence de e) ([10], p.65).

L'hypothèse d) est une condition de différentiabilité en moyenne quadratique dans $L^2(\mu)$. Si on suppose, de plus, que la fonction f est dérivable en θ au sens usuel, on a $\phi(x, \theta) = \frac{\nabla f(x, \theta)}{2\sqrt{f(x, \theta)}}$ et nous retrouvons l'expression classique

$$J(\theta) = \left[\int \frac{\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_j}}{f(x, \theta)} d\mu(x) \right]_{0 \leq i, j \leq d}.$$

Les liens entre dérivation usuelle et dérivation en moyenne quadratique se font via des conditions d'équi-intégrabilité ([6], [14], p.95).

L'hypothèse d'identifiabilité f) est une hypothèse purement statistique. Intuitivement elle correspond au fait que le modèle paramétrique permet de distinguer $\theta' \neq \theta''$ si et seulement si $P_{\theta'} \neq P_{\theta''}$. La justification théorique est alors la suivante : Si on dispose d'une famille dénombrable d'observations i.i.d de loi $P_{\theta'}$ (resp. $P_{\theta''}$) notée $Z^{\theta'} = (X_i^{\theta'})_{i \in \mathbb{N}}$ (resp. $Z^{\theta''}$), si $\theta' \neq \theta''$, les lois des processus $Z^{\theta'}$ et $Z^{\theta''}$ (qui existent en vertu du théorème de Kolmogorov) sont de supports disjoints. Ainsi, à la limite, on sait différencier parfaitement θ' et θ'' grâce à l'expérience.

1.1.2 Inégalité de Cramer-Rao

Théorème 1.1.1 ([10], p.73) *Soient $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable et $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ un modèle régulier tel que, $\forall \theta \in \Theta$, $J(\theta)$ est inversible. Si $T(X)$ est un estimateur sans biais de $\psi(\theta)$ (i.e $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[T(X)|V = \theta] = \psi(\theta)$) tel que la fonction $\theta \mapsto \int T^2(x)f(x, \theta)d\mu(x)$ est localement bornée, alors, $\forall \theta \in \Theta$,*

$$\int_E [(T(x) - \psi(\theta))(T(x) - \psi(\theta))^t] f(x, \theta) d\mu(x) \geq \psi'(\theta) J^{-1}(\theta) \psi'(\theta)^t \quad (1.2)$$

où \geq est la relation d'ordre entre matrices symétriques définie par le cône des matrices symétriques positives.

Remarque 1 : Un estimateur $T(X)$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent sera appelé un estimateur sans biais régulier de $\psi(\theta)$.•

Ainsi, en supposant dorénavant la matrice d'information de Fisher inversible, l'inégalité de Cramer-Rao nous fournit une borne d'estimation minorant le risque quadratique. Revenons alors à la structure d'erreur $S^V = (\Theta, \mathcal{B}(\Theta), \rho, \mathbb{D}^V, \Gamma^V)$ que nous voulons identifier. Comme Γ^V vérifie un calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$, lorsque les composantes de l'application identité $Id : \Theta \rightarrow \Theta$ sont dans \mathbb{D}^V , on a, $\forall F \in Lip^1(\Theta) = \{F : \Theta \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } F \in C^1(\Theta, \mathbb{R}) \text{ et } F \text{ lipschitzienne}\}$, $\forall \theta \in \Theta$,

$$\Gamma^V[F] = (\nabla_\theta F)^t \Gamma^V[Id] (\nabla_\theta F)$$

où la matrice $\Gamma^V[Id](\theta)$ représente la variance conditionnelle de l'erreur commise sur V , sachant $V = \theta$. C'est cette dernière qu'il faut connaître et l'inégalité de Cramer-Rao, qui peut se reformuler, lorsque $\psi = Id : \Theta \rightarrow \Theta$, de la manière suivante :

$$\text{var}(T(X) - \theta | V = \theta) \geq J^{-1}(\theta),$$

nous conduit à poser l'identification fondamentale

$$\Gamma^V[Id] = J^{-1}. \quad (1.3)$$

La notion d'erreur sur le paramètre θ est donc ici à comprendre en termes d'approchabilité par des estimateurs réguliers.

On obtient donc une pré-structure d'erreur $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta), \rho, Lip^1(\Theta), \Gamma^V)$ au sens de la définition 0.3.2. De même qu'en statistiques on cherche à identifier un espace de probabilité dont la mesure est supposée, *a priori*, σ -additive, on cherche ici à déterminer à partir de données statistiques une structure d'erreur dans laquelle la forme quadratique a la propriété d'être fermée. En accord avec l'identification fondamentale, nous supposerons désormais l'hypothèse (E) vérifiée :

Hypothèse (E) : On suppose que $Lip^1(\Theta) \subset L^2(\rho)$ et que la forme bilinéaire suivante

$$\mathcal{E}^V[F, G] = \frac{1}{2} \mathbb{E}_\rho[(\nabla_\theta F)^t J^{-1}(\nabla_\theta G)]$$

est bien définie sur $Lip^1(\Theta)$ et est fermable (définition 0.3.1). On note \mathbb{D}^V le domaine de sa plus petite extension fermée.

Cette hypothèse impose des conditions sur ρ et sur J^{-1} . Nous donnons dans la proposition suivante deux situations où elle est vérifiée.

Proposition 1.1.1 a) Soit Θ un ouvert borné de \mathbb{R}^d de la forme $\Theta = \prod_{i=1}^d]\theta_0^i, \theta_1^i[$ où les θ_j^i sont des réels tels que $\theta_1^i \geq \theta_0^i$. On suppose que la mesure ρ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur Θ avec une densité $q > 0$ appartenant à $Lip^1(\Theta)$. Alors, si le modèle $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ se prolonge en un modèle régulier sur un ouvert Θ' avec $\bar{\Theta} \subset \Theta'$, l'hypothèse (E) est vérifiée.

b) Si $\Theta = \mathbb{R}$, en supposant que $\int_\Theta \theta^2 d\rho(\theta) < \infty$ et que $\frac{1}{j} \in L^1(\rho)$, l'hypothèse (E) est équivalente aux conditions du théorème de Hamza (proposition 0.3.2).

Preuve : a) Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $Lip^1(\Theta)$ telle que

$$F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ dans } L^2(\rho) \text{ et } \Gamma^V[F_n - F_m] \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0 \text{ dans } L^1(\rho).$$

Nous devons démontrer que $\Gamma^V[F_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ dans $L^1(\rho)$.

On définit l'application Φ de la manière suivante :

$$\Phi : \begin{pmatrix} \bar{\Theta} \times \mathcal{S}_d \longmapsto \mathbb{R}_+^* \\ (\theta, \xi) \longrightarrow \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(\theta) \xi_i \xi_j \end{pmatrix}$$

où \mathcal{S}_d est la sphère unité de \mathbb{R}^d et où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de J^{-1} .

Comme $(P_\theta)_{\theta \in \Theta'}$ est un modèle régulier, on peut montrer ([10], p.65) que J est continue sur Θ' . La matrice J^{-1} étant un polynôme en J , l'application Φ est continue sur un compact et il existe deux réels $\delta, \delta' > 0$ tels que $\delta \leq \Phi \leq \delta'$. Ceci implique la relation suivante :

$$\delta \|\nabla F_n - \nabla F_m\|^2 \leq \Gamma^V[F_n - F_m] \leq \delta' \|\nabla F_n - \nabla F_m\|^2. \quad (1.4)$$

Ainsi, la suite ∇F_n est de Cauchy dans $L^2(\rho; \mathbb{R}^d)$. On a donc l'existence d'une fonction $G = (G_1, \dots, G_d)$ dans $L^2(\rho; \mathbb{R}^d)$ avec, $\forall i \in \{1, \dots, d\}$, $\frac{\partial F_n}{\partial x_i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G_i$ dans $L^2(\rho)$. Comme les fonctions ϕ , q et F_n sont lipschitziennes, on peut les prolonger à $\bar{\Theta}$. En intégrant par parties, on montre que, $\forall \phi \in C_K^\infty(\Theta, \mathbb{R})$,

$$-\int_{\Theta} F_n(\partial_i \phi) q d\theta = \int_{\Theta} (\partial_i F_n) \phi q d\theta + \int_{\Theta} F_n \phi (\partial_i q) d\theta.$$

En passant à la limite, on obtient $\int_{\Theta} G_i \phi q d\theta = 0$ et donc $G_i = 0$. On conclut en utilisant l'inégalité (1.4)

b) Il suffit de voir que le théorème de Hamza donne des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une structure d'erreur $S = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \rho, \mathbb{D}, \Gamma^V)$ vérifiant $C_K^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathbb{D}$ et $\Gamma^V[F] = \frac{F'^2}{J}$ sur $C_K^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $C_K^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Id$ avec, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|F_n| \leq |Id|$ et $F_n' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ avec, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|F_n'| \leq 1$. On montre, en utilisant le théorème de convergence dominée et la fermeture de Γ^V , que $Lip^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{D}$ avec $\Gamma^V[F] = \frac{F'^2}{J}$ sur $Lip^1(\mathbb{R})$. Le résultat est alors immédiat. \square

Remarque 2 : i) L'opérateur Γ^V étant défini ρ -p.p, on peut assouplir les hypothèses sur le modèle $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ en supposant que l'ensemble

$$\{\theta \in \Theta \mid \exists U(\theta) \subset \Theta \text{ voisinage ouvert de } \theta \text{ tel que } (P_\theta)_{\theta \in U(\theta)} \text{ est régulier}\}$$

est de mesure pleine pour ρ .

ii) En statistiques, les modèles réguliers dont la matrice d'information de Fisher est constante sont nombreux ([13]) : Modèles normaux à variance fixée, Modèles logistiques, "Location family", Modèles normaux avec coefficient de variation fixé, "Scale parameter". Dans ce cas, lorsque l'on se place sous la condition

a) de la proposition précédente, (E) est vérifiée sans hypothèses de prolongement sur le modèle.

iii) Une des caractéristiques de l'opérateur Γ^V est d'être bilinéaire. Il est possible d'introduire un nouvel opérateur, le gradient, noté ∇^V , qui peut être vu comme une version linéaire et signée de l'écart type et vérifie, $\forall F \in \mathbb{D}^V$,

$$\Gamma^V[F] = \langle \nabla^V[F], \nabla^V[F] \rangle .$$

Comme la structure d'erreur S^V est définie sur un espace de dimension finie, il est très facile d'obtenir ∇^V en posant

$$\nabla^V : \left(\begin{array}{l} \mathbb{D}^V \longrightarrow L^2(\rho; \mathbb{R}^d) \\ F \longmapsto R(F')^t \end{array} \right)$$

où R est la racine carrée de J^{-1} . Cet opérateur vérifie notamment la propriété classique de dérivation des fonctions composées.●

1.1.3 Un exemple : volatilité historique dans le modèle de Black-Scholes

Nous renvoyons le lecteur à [11] pour une présentation plus détaillée du modèle de Black-Scholes et la démonstration des résultats utilisés dans cette section.

On suppose que le comportement au cours du temps de la valeur d'un actif financier risqué (i.e dépendant du hasard), notée $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, est modélisé par la dynamique de Black-Scholes. Ainsi, le processus $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$dS_t = S_t(\sigma dB_t + r dt) \quad (1.5)$$

où $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien standard, r est le taux d'intérêt des placements sans risque supposé constant et σ une constante strictement positive appelée volatilité.

Remarque 3 : Le fait que le coefficient de dérive dans l'équation (1.5) ait été pris égal à r signifie implicitement que nous travaillons ici sous la probabilité risque neutre i.e l'unique probabilité telle que le cours actualisé de l'actif risqué soit une martingale.●

Nous savons, alors, que la valeur, au temps $0 \leq t \leq T$, d'une option européenne d'échéance T et de payoff $f(S_T)$ vérifie $V_t = F(t, S_t, \sigma, r)$ où

$$F(t, x, \sigma, r) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f \left(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}} \right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy.$$

Lorsque la fonction f est à croissance linéaire (c'est le cas notamment lorsque l'option est un call ou un put européen), on peut voir que F est régulière. Les dérivées de F par rapport aux variables (t, x, σ, r) sont appelées les grecques et sont des quantités fondamentales de la finance mathématique possédant une signification financière forte. En particulier, on pose

$$\begin{aligned} \text{delta}_t &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t, \sigma, r) \\ \text{gamma}_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t, \sigma, r). \end{aligned}$$

D'un point de vue pratique, delta_t représente la quantité d'actif risqué que doit contenir, à l'instant t , un portefeuille auto-financé couvrant l'option européenne et gamma_t la sensibilité de cette quantité d'actif risqué aux variations du cours de l'actif.

On suppose la volatilité erronée et nous allons voir que la procédure classique de détermination de σ par la méthode historique nous fournit, via l'identification fondamentale, une structure d'erreur naturelle.

Soit $\tilde{T} \in \mathbb{R}_+$. À partir des valeurs du cours de l'actif observées dans le passé $[-\tilde{T}, 0]$, on peut estimer σ par des voies statistiques. On suppose, pour cela, que la dynamique de S sur $[-\tilde{T}, 0]$ est la même que sur $[0, T]$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ représentant le nombre d'observations (effectuées à intervalles de temps réguliers) du cours passé de l'actif, les variables aléatoires

$$Y_1^N = \text{Log} \left(\frac{S_0}{S_{-\frac{\tilde{T}}{N}}} \right), \dots, Y_N^N = \text{Log} \left(\frac{S_{-\tilde{T}}}{S_{-\frac{(N-1)\tilde{T}}{N}}} \right)$$

sont i.i.d de loi

$$\mathcal{N} \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tilde{T}}{N}, \sigma^2 \frac{\tilde{T}}{N} \right).$$

On a donc un modèle paramétrique naturel d'estimation de la volatilité qui conduit, en utilisant l'identification fondamentale, à

$$\Gamma^\sigma[\text{Id}](\sigma) = \frac{\sigma^2}{2N + \sigma^2 \tilde{T}}.$$

Remarque 4 : On peut montrer que, sous des hypothèses assez larges sur la loi *a priori* ρ^σ dont on équipe \mathbb{R}_+ (voir par exemple [8], p.100), (E) est vérifiée. ●

Nous voyons ainsi, que lorsque \tilde{T} (resp. N) est fixé, l'erreur diminue lorsque le nombre d'observations historiques (resp. la fenêtre d'observation) augmente. De plus, en supposant f de classe $C^1 \cap \text{Lip}$ et en utilisant le calcul fonctionnel, on obtient les formules de propagation suivantes :

$$\begin{aligned}\Gamma^\sigma[S_t] &= (B_t - \sigma t)^2 S_t^2 \Gamma^\sigma[Id] \\ \Gamma^\sigma[V_t] &= (S_t(B_t - \sigma t) \text{delta}_t + (T - t) \sigma S_t^2 \text{gamma}_t)^2 \Gamma^\sigma[Id] \\ \Gamma^\sigma[S_t, V_t] &= (B_t - \sigma t) S_t (S_t(B_t - \sigma t) \text{delta}_t + (T - t) \sigma S_t^2 \text{gamma}_t) \Gamma^\sigma[Id].\end{aligned}$$

Un des avantages du calcul d'erreur dans ce cas est de compléter le calcul des grecques en permettant de prendre en compte les phénomènes de corrélation.

Nous allons voir, maintenant, que les propriétés analytiques bien connues de la matrice d'information de Fisher permettent de déduire certaines propriétés algébriques de l'identification fondamentale.

1.2 Changements de variables : Cas injectif

Nous testons ici la cohérence de l'identification fondamentale vis-à-vis des changements de variables injectifs.

1.2.1 Le cas injectif régulier

Définition 1.2.1 *Supposons $\psi \in \mathcal{C}^1(\Theta, \mathbb{R}^d) \cap Lip$ injective. On dit que ce changement de variables est régulier si, $\forall \theta \in \Theta$, $\psi'(\theta)$ est inversible. En vertu du théorème d'inversion locale, ψ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur son image et $\psi(\Theta)$ est un ouvert de \mathbb{R}^d .*

Il existe alors deux façons naturelles d'équiper $\psi(\Theta)$ d'une structure d'erreur.

Du point de vue de l'estimation :

Dans le cas injectif, le changement de variables réalise en fait une simple reparamétrisation du modèle. On procède par estimation pour connaître $\psi(\theta)$ à partir du modèle dominé ($P_{\psi^{-1}(a)}$, $a \in \psi(\Theta)$). Comme $dP_{\psi^{-1}(a)}(x) = f(x, \psi^{-1}(a))d\mu(x)$, on peut voir facilement que ce modèle vérifie les hypothèses du modèle régulier. Nous examinons alors la structure d'erreur obtenue en faisant l'identification fondamentale. Ainsi, $\Gamma^{\psi(V)}$ est défini sur $Lip^1(\psi(\Theta))$ et vérifie, $\forall a \in \psi(\Theta)$,

$$\Gamma^{\psi(V)}[F](a) = (\nabla_a F)^t (J^{\psi(V)}(a))^{-1} (\nabla_a F)$$

où $J^{\psi(V)}$ est la matrice d'information de Fisher du modèle régulier ($P_{\psi^{-1}(a)}$, $a \in \psi(\Theta)$). Comme, $\forall a \in \psi(\Theta)$,

$$J^{\psi(V)}(a) = [\psi'(\psi^{-1}(a))^{-1}]^t [J(\psi^{-1}(a))] [\psi'(\psi^{-1}(a))^{-1}]$$

on a, $\forall F \in Lip^1(\psi(\Theta))$,

$$\Gamma^{\psi(V)}[F](a) = (\nabla_a F)^t [\psi'(\psi^{-1}(a))] [J(\psi^{-1}(a))]^{-1} [\psi'(\psi^{-1}(a))]^t (\nabla_a F). \quad (1.6)$$

La fonction ψ étant injective de classe $C^1 \cap Lip$, on déduit aisément de l'hypothèse (E) que $\mathcal{E}^{\psi(V)}$ définie sur $Lip^1(\psi(\Theta))$ par

$$\mathcal{E}^{\psi(V)}[F] = \frac{1}{2} \int_{\psi(\Theta)} \Gamma^{\psi(V)}[F] d\psi_*\rho$$

est fermable et nous notons $\mathbb{D}^{\psi(V)}$ le domaine de sa plus petite extension fermée. Nous obtenons alors la structure d'erreur associée à l'estimation de $\psi(\theta)$ en posant

$$S^{\psi(V)} = (\psi(\Theta), \mathcal{B}(\psi(\Theta)), \psi_*\rho, \mathbb{D}^{\psi(V)}, \Gamma^{\psi(V)}).$$

Remarque 5 : Dans le cas $d = 1$, on obtient $J^{\psi(V)}(\psi) = \frac{J}{\psi'^2}$. Ainsi, plus la fonction ψ est plate en θ , plus l'erreur commise en estimant $\psi(\theta)$ est petite devant celle commise en estimant θ ce qui est intuitivement satisfaisant. •

Du côté du calcul d'erreur

Nous avons vu en introduction (section 0.3) que l'un des principaux avantages du calcul d'erreur est d'hériter de toute la souplesse algébrique du calcul des probabilités. Comme $\psi \in \mathbb{D}^V$, on est en droit de considérer la structure image de S^V par ψ (définition 0.3.3) qui fournit naturellement une structure d'erreur sur $\psi(\Theta)$ notée $\psi_*S^V = (\psi(\Theta), \mathcal{B}(\psi(\Theta)), \psi_*\rho, \mathbb{D}_\psi^V, \Gamma_\psi^V)$.

On a alors le résultat suivant qui ôte toute ambiguïté quant au choix éventuel d'une structure d'erreur :

Proposition 1.2.1 *L'identification fondamentale est stable par la transformation ψ . En d'autres termes,*

$$\psi_*S^V = S^{\psi(V)}.$$

Preuve : En utilisant la densité de $Lip^1(\psi(\Theta))$ dans les espaces $(\mathbb{D}_\psi^V, \|\cdot\|_{\mathbb{D}_\psi^V})$ et $(\mathbb{D}^{\psi(V)}, \|\cdot\|_{\mathbb{D}^{\psi(V)}})$, il nous suffit de démontrer que, $\forall F \in Lip^1(\psi(\Theta))$,

$$\Gamma^{\psi(V)}[F] = \Gamma_\psi^V[F] \quad \psi_*\rho\text{-p.p.}$$

Or, $\forall a \in Im(\psi)$,

$$\Gamma_\psi^V[F](a) = \mathbb{E}_\rho[\Gamma^V[F(\psi)] \mid \psi = a] = \mathbb{E}_\rho[[\nabla(F(\psi))]^t J^{-1}[\nabla(F(\psi))] \mid \psi = a].$$

Ainsi, en utilisant le caractère inversible de ψ et la relation (1.6), on a le résultat. \square

Remarque 6 : Lorsque l'on étudie la sensibilité d'un modèle physique ou financier à une perturbation d'un paramètre θ , la proposition précédente nous assure que la précision associée à la structure d'erreur obtenue par l'identification fondamentale possède une signification physique forte car elle est indépendante du paramétrage choisi. •

1.2.2 Le cas injectif non régulier

Après l'étude effectuée dans le paragraphe précédent, regardons ce qu'il se passe en un point θ tel que $\psi'(\theta)$ est singulière. Supposons dans un premier temps que $d = 1$.

Soit $a_0 = \psi(\theta_0)$ avec $\theta_0 \in \Theta$ tel que $\psi'(\theta_0) = 0$. On voit facilement que le modèle $(P_{\psi^{-1}(a)}, a \in \psi(\Theta))$ présente une irrégularité en a_0 . Intuitivement, au delà de l'irrégularité analytique, une telle situation est d'autant moins préjudiciable qu'elle conduit à une bonne estimation (remarque 5). Si on pose $J^{\psi(V)}(a_0) = +\infty$ on a

$$\Gamma^{\psi(V)}[Id](a_0) = \frac{1}{J^{\psi(V)}(a_0)} = 0 = \Gamma_V^{\psi}[Id](a_0).$$

Dans le cas général, comme $J(\theta_0)$ est symétrique, définie et positive et comme $\psi'(\theta_0)$ est symétrique, on peut diagonaliser simultanément ces deux matrices et donc travailler composante par composante. En supposant $\psi'(\theta_0)$ non inversible, on a des directions propres non triviales pour la valeur propre 0 qui, par analogie avec le cas $d = 1$, correspondront à des directions d'information infinie pour $J^{\psi(V)}(a_0)$. Les directions propres correspondant aux autres valeurs propres se traitent comme dans le cas régulier.

Ainsi, l'identification fondamentale est encore stable dans ce cas.

Remarque 7 : i) Le concept d'information infinie se rencontre dans le cadre des théorèmes de statistiques asymptotiques où il traduit une vitesse de convergence plus rapide de l'estimateur du maximum de vraisemblance vers le paramètre à estimer.

ii) Nous venons de voir que, dans le cas de changements de variables injectifs, la structure d'erreur obtenue en estimant directement $\psi(\theta)$ coïncide avec l'image par ψ de la structure obtenue en estimant θ . Ceci peut être relié au principe d'exhaustivité bien connu au niveau de l'information de Fisher ([10], p.70). En effet, lorsque ψ est injective, P_θ ne dépend de θ qu'à travers ψ .

iii) La proposition 1.2.1 repose sur la relation très simple entre $J^{\psi(V)}$ et J . Cette propriété de l'information de Fisher n'est pas vérifiée par d'autres bornes d'estimation plus précises de type Bhattacharaya ([13]) qui font intervenir des dérivées d'ordre supérieur et rendent une généralisation impossible. Il semble que

les hypothèses du modèle régulier et la notion de précision sous jacente sont le bon degré d'axiomatisation pour une compatibilité avec la notion d'image. •

1.3 Cas non injectif

Nous sommes maintenant en présence d'une situation très particulière : nous avons pu mettre en correspondance un modèle paramétrique régulier et une structure d'erreur via la notion d'information de Fisher et nous avons vu, dans la section précédente, que notre choix de Γ^V est compatible avec les changements de variables injectifs de classe $C^1 \cap Lip$. Cependant, d'un coté (celui du calcul d'erreur) les changements de variables non injectifs sont permis (définition 0.3.3), de l'autre (modèles statistiques) ils posent des difficultés. Nous allons donc tirer parti de cette remarque pour proposer un nouveau cadre d'estimation dans le cas non injectif. Ce cadre est directement lié à la notion de structure d'erreur.

Nous supposons dans cette partie que ψ est une fonction dans $Lip^1(\Theta)$ (pas nécessairement injective) mais telle que $\psi(\Theta)$ est un ouvert de \mathbb{R}^d .

Un premier problème se pose. Si on dispose, pour estimer θ , d'un modèle paramétrique régulier, quel modèle peut-on choisir pour estimer $\psi(\theta)$? En effet, la reparamétrisation utilisée dans la section précédente n'a ici plus de sens.

1.3.1 Protocole d'estimation de $\psi(\theta)$ lorsque ψ n'est pas injective

Pour estimer θ , on utilise toujours le modèle régulier $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ vérifiant l'hypothèse (E). Dans cette section, les variables aléatoires $X_1 \dots X_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans (E, \mathcal{F}) seront telles que le vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) est, sachant $V = \theta$, un n-échantillon de la loi P_θ .

Il semblerait alors naturel, pour estimer $\psi(\theta)$, d'utiliser le modèle $(Q_a)_{a \in \psi(\Theta)}$ généré par l'observation de (X_1, \dots, X_n) , sachant $\psi(V) = a$. Par définition de l'espérance conditionnelle on a

$$dQ_a(x) = \mathbb{E}_\rho[f(x, \cdot) \mid \psi = a]d\mu(x).$$

On voit, en particulier, que le calcul de Q_a nécessite une connaissance globale en θ de $f(x, \cdot)$.

Remarque 8 : i) Dans le cas où le changement de variables est injectif, le protocole ci-dessus coïncide avec la reparamétrisation introduite à la section 1.2 car $Q_a = P_{\psi^{-1}(a)}$, ainsi, une connaissance ponctuelle et non globale est alors suffisante.

ii) L'étude de l'effet des changements de variables non injectifs dans les modèles statistiques paramétriques est traitée dans la littérature sous une forme restrictive. On suppose pour simplifier que $d=1$. On considère un point θ_0 tel que $\psi'(\theta_0) \neq 0$. Comme $\psi \in C^1(\Theta, \mathbb{R})$, d'après le théorème d'inversion locale, il existe $\theta_0^{min}, \theta_0^{max}$ tels que $\psi :]\theta_0^{min}, \theta_0^{max}[\rightarrow \psi(]\theta_0^{min}, \theta_0^{max}[)$ soit un C^1 -difféomorphisme d'inverse i_{θ_0} (qui dépend du point θ_0 contrairement au cas injectif).

On suppose que des observations préalables de θ nous permettent de nous restreindre à son estimation dans $]\theta_0^{min}, \theta_0^{max}[$. On est donc localement ramené au problème traité à la section 1.2 et on pose, $\forall a \in \psi(]\theta_0^{min}, \theta_0^{max}[)$,

$$J_{\theta_0}^{\psi(V)}(a) = \frac{J(i_{\theta_0}(a))}{\psi'^2(i_{\theta_0}(a))}.$$

On appellera $J_{\theta_0}^{\psi(V)}(a)$ l'information de Fisher locale car elle ne fait intervenir qu'un antécédent de a et occulte le fait qu'il peut en exister plusieurs.

Ce concept est pertinent si on parvient à localiser notre estimation dans un voisinage où la fonction est injective sinon il faut faire appel à une notion qui prenne en compte tout le comportement de ψ . On doit, en quelque sorte, effectuer un passage du local au global qui fera intervenir de manière naturelle l'opérateur Γ_{ψ}^V .

Il est facile de voir que dans le cas non injectif, le modèle $(Q_a)_{a \in \psi(\Theta)}$ peut présenter des irrégularités (avec notamment la présence de sauts pour la densité). De plus, même lorsque la matrice d'information de Fisher associée est bien définie, elle est souvent difficilement calculable. Nous allons mettre en évidence la pertinence du calcul d'erreur dans cette situation en montrant comment l'opérateur Γ_{ψ}^V fournit, par des calculs simples, une borne naturelle d'estimation liée aux statistiques asymptotiques.

1.3.2 Γ_{ψ}^V comme borne d'estimation

Par soucis de concision, nous allons nous placer dans le cas $d = 1$. Lorsque $T(X_1)$ est un estimateur régulier sans biais de $\psi(\theta)$, l'inégalité de Cramer-Rao

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(T(X_1) - \psi(\theta))^2 \mid V = \theta] \geq \frac{\psi'^2(\theta)}{J(\theta)} \quad (1.7)$$

fournit un minorant du risque quadratique et permet d'interpréter $J(\theta)$ comme l'information sur θ contenue dans l'observation X_1 .

Ainsi, en conditionnant l'équation (1.7) par rapport à ψ , on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(T(X_1) - a)^2 \mid \psi(V) = a] \geq \mathbb{E}_{\rho}\left[\frac{\psi'^2}{J} \mid \psi = a\right] = \Gamma_{\psi}^V[Id](a) \quad (1.8)$$

et $\Gamma_{\psi}^V[Id]$ est alors une borne d'estimation naturelle du problème.

1.3.3 Γ_ψ^V comme variance asymptotique

Pour éviter les questions parfois délicates d'existence et d'unicité de l'estimateur du maximum de vraisemblance, nous supposons que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, l'équation

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log} f(x_i, \theta) = 0$$

admet une unique solution notée $\hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)$ qui est un maximum de la fonction $\theta \mapsto \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$. On supposera de plus que Θ est un ouvert borné et convexe de \mathbb{R} (ce qui est peu restrictif du point de vue des applications et peut être étendu au cas $d > 1$).

Nous renvoyons le lecteur à l'appendice situé en fin de chapitre pour quelques rappels concernant l'étude de la convergence de la suite d'estimateurs du maximum de vraisemblance $(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Nous sommes alors en mesure d'exhiber un estimateur consistant dans le problème de l'estimation directe de $\psi(\theta)$ à l'aide des expériences générées par l'observation de (X_1, \dots, X_n) , sachant $\psi(V) = a$. La quantité Γ_ψ^V va apparaître naturellement dans les théorèmes limites associés à ce protocole statistique. On introduit, à cet effet, la notation suivante : Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et Z sont des variables aléatoires définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, l'expression $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{P})} Z$ désigne la convergence en loi de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers Z .

Remarque 9 : Sachant $\psi(V) = a$, (X_1, \dots, X_n) n'est pas toujours un n-échantillon de la loi Q_a . En effet, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, la relation

$$\mathbb{E}_\rho[f(x_1, \cdot) \dots f(x_n, \cdot) \mid \psi = a] = \mathbb{E}_\rho[f(x_1, \cdot) \mid \psi = a] \dots \mathbb{E}_\rho[f(x_n, \cdot) \mid \psi = a]$$

n'est pas, en général, vérifiée. Cependant, lorsque ψ est injective, l'égalité précédente est triviale. •

Proposition 1.3.1 *Sous les hypothèses de la proposition A1 de l'appendice, on a, $\forall a \in \psi(\Theta)$,*

1) $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}[I_{|\psi(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)) - \psi(V)| > \varepsilon} \mid \psi(V) = a] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2) Sachant $\psi(V) = a$,

$$\sqrt{n}(\psi(\hat{\theta}_n) - a) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{P})} G_a$$

où G_a est, sous \mathbb{P} , une variable aléatoire ayant la densité

$$g(x, a) = \mathbb{E}_\rho[I_{\psi' \neq 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\psi'^2}{J}}} e^{\frac{-x^2 J}{2\psi'^2}} \mid \psi = a]$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} (cette variable aléatoire a donc pour variance $\Gamma_\psi^V[Id](a)$)

Preuve : 1) On note C la constante de Lipschitz de ψ . D'après le théorème de Fubini et la définition de l'espérance conditionnelle, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (E)^n, \forall a \in \psi(\Theta)$,

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}[I_{|\psi(\widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)) - \psi(V)| > \varepsilon} \mid \psi(V) = a]$$

est égale à

$$\mathbb{E}_\rho[\int_{E^n} I_{|\psi(\widehat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)) - a| > \varepsilon} f(x_1, \cdot) \dots f(x_n, \cdot) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) \mid \psi = a].$$

Or, comme

$$I_{|\psi(\widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)) - \psi(V)| > \varepsilon} \leq I_{|\widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - V| > \frac{\varepsilon}{C}},$$

le résultat se déduit du théorème A1 de l'appendice par convergence dominée.

2) D'après le théorème A2 de l'appendice, on sait que, sachant $V = \theta$,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{P})} \mathcal{N}(0, \frac{1}{J(\theta)}).$$

Ainsi, lorsque $\psi'(\theta_0) = 0$, un simple développement limité entraîne

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}(I_{\sqrt{n}|\psi(\widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)) - \psi(V)| > \varepsilon} \mid V = \theta_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Lorsque $\psi'(\theta_0) \neq 0$, le lemme de Slutsky ([12], p.86) nous assure que, sachant $V = \theta_0$,

$$\sqrt{n}(\psi(\widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)) - \psi(\theta_0)) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{P})} \mathcal{N}(0, \frac{\psi'^2(\theta_0)}{J(\theta_0)}).$$

Soit F une fonction continue bornée. On montre, en suivant un raisonnement analogue à 1), que la quantité $\mathbb{E}_\mathbb{P}[F(\sqrt{n}(\psi(\widehat{\theta}_n) - a)) \mid \psi(V) = a]$ est égale à

$$\mathbb{E}_\rho[\int_{E^n} F(\sqrt{n}(\psi(\widehat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)) - \psi)) f(x_1, \cdot) \dots f(x_n, \cdot) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) \mid \psi = a].$$

Le résultat en découle par convergence dominée. \square

Remarque 10 : i) Lorsque ψ est injective, $\psi(\widehat{\theta}_n)$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance du modèle $(Q_a)_{a \in \psi(\Theta)}$.

ii) On peut, en utilisant le théorème de Borel-Cantelli et le caractère $C^1 \cap Lip$ de ψ , étendre la convergence en probabilité dans 1) en une convergence presque sûre.

iii) La quantité $\Gamma_\psi^V[Id]$ est, en fait, une moyenne pondérée des inverses des informations de Fisher locales comme nous pouvons le voir sur l'exemple suivant. Soit $\Theta =]-1, 1[\setminus \{0\}$, $\rho(\theta) = q(\theta)d\theta$, $\psi(\theta) = \theta^2$ et $a_0 \in]0, 1[$. Le point a_0 possède deux antécédents pour ψ : $\theta_1 = \sqrt{a_0}$ auquel correspond l'information de Fisher locale $J_{\theta_1}^{\psi(V)}(a_0) = \frac{J(\theta_1)}{\psi'^2(\theta_1)}$ et $\theta_2 = -\sqrt{a_0}$ avec $J_{\theta_2}^{\psi(V)}(a_0) = \frac{J(\theta_2)}{\psi'^2(\theta_2)}$. Un calcul très simple d'espérance conditionnelle donne alors

$$\Gamma_\psi^V[Id](a_0) = \frac{\frac{q(\theta_1)}{J_{\theta_1}^{\psi(V)}(a_0)} + \frac{q(\theta_2)}{J_{\theta_2}^{\psi(V)}(a_0)}}{q(\theta_1) + q(\theta_2)}$$

qui n'est autre qu'une moyenne pondérée par ρ des inverses des informations de Fisher locales de chaque antécédent de a_0 .

iv) Dans le cas où $\rho(\theta) = q(\theta)d\theta$ avec q continue, on a des résultats analogues en remplaçant l'estimateur du maximum de vraisemblance par l'estimateur de Bayes relatif à la fonction de perte quadratique et à la probabilité *a priori* ρ .

v) Asymptotiquement, on réalise la borne d'estimation mise en place dans 1.3.2. •

Dans le but d'obtenir une convergence en moyenne quadratique pour $\sqrt{n}(\psi(\widehat{\theta}_n) - a)$ (et donc de pouvoir calculer numériquement $\Gamma_\psi^V[Id]$ par méthode de Monte-Carlo) nous devons renforcer les hypothèses de la proposition 1.3.1. On notera r la distance de Hellinger (voir appendice) qui vérifie, $\forall(\theta, \theta') \in \Theta^2$,

$$r(P_\theta, P_{\theta'}) = \int_E (\sqrt{f(x, \theta)} - \sqrt{f(x, \theta')})^2 d\mu(x).$$

Proposition 1.3.2 *On suppose que le modèle $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ se prolonge en un modèle régulier sur un ouvert Θ' tel que $\bar{\Theta} \subset \Theta'$. Si de plus*

$$1) 0 < \inf_{\Theta'} J(\theta) \leq \sup_{\Theta'} J(\theta) < \infty$$

$$2) \forall \delta > 0,$$

$$\inf_{\theta \in \Theta'} \inf_{u \in U_{1,\theta}, |u| > \delta} r(P_\theta, P_{\theta+u}) > 0$$

où $\tilde{U}_{1,\theta} = \{u \in \mathbb{R} \mid \theta + u \in \Theta'\}$, alors, $\forall a \in \psi(\Theta)$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[n(\psi(\widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)) - a)^2 \mid \psi(V) = a] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma_\psi^V[Id](a).$$

Preuve : Les conditions 1) et 2) nous assurent, grâce à une version uniforme du théorème A2 de l'appendice, que

$$\sup_{\theta \in \Theta} (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[n(\widehat{\theta}_n - \theta)^2 \mid V = \theta] - \frac{1}{J(\theta)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1.9)$$

De plus, d'après le théorème de Fubini, la quantité $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[n(\psi(\widehat{\theta}_n) - a)^2 \mid \psi(V) = a]$ est égale à

$$\mathbb{E}_{\rho} \left[\int_{E^n} n(\psi(\widehat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)) - \psi)^2 f(x_1, \cdot) \dots f(x_n, \cdot) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) \mid \psi = a \right].$$

Or, comme ψ est lipschitzienne, on peut montrer, en utilisant (1.9), que

$$A = \int_{E^n} n(\psi(\widehat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)) - \psi(\theta))^2 f(x_1, \theta) \dots f(x_n, \theta) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n)$$

vérifie $A \leq \frac{cste}{J(\theta)}$ où $J^{-1} \in L^1(\rho)$. On conclut alors par le théorème de convergence dominée en remarquant que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[n(\widehat{\theta}_n - \theta)^2 \mid V = \theta] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{J(\theta)}$$

implique

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[n(\psi(\widehat{\theta}_n) - \psi(\theta))^2 \mid V = \theta] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\psi'^2(\theta)}{J(\theta)}. \square$$

Ainsi, à partir d'hypothèses sur le modèle $(P_{\theta})_{\theta \in \Theta}$, on peut obtenir une borne dans le problème de l'estimation directe de $\psi(\theta)$ à l'aide des expériences générées par l'observation de (X_1, \dots, X_n) sachant $\psi(V) = a$. De plus, nous avons exhibé un estimateur consistant et prouvé un théorème de convergence en loi commode pour les applications. Ceci ne nécessite aucune hypothèse de régularité sur le modèle $(Q_a)_{a \in \psi(\Theta)}$ autre que celles déduites des conditions imposées à $(P_{\theta})_{\theta \in \Theta}$. Que se passe-t-il lorsque le modèle $(Q_a)_{a \in \psi(\Theta)}$ est suffisamment régulier pour pouvoir définir l'information de Fisher $J^{\psi(V)}$? On dispose alors d'une autre borne d'estimation, qui peut apparaître dans certains théorèmes limites liés à l'estimation de $a = \psi(\theta)$ à l'aide de n -échantillons de la loi Q_a . Il semble naturel de comparer ces deux bornes. Dans le cas où ψ est injective, on a vu que ces deux bornes coïncident ce qui n'est pas le cas en général. Examinons un exemple.

On se place dans la situation où $\Theta =]-1; 1[\setminus \{0\}$, ρ est la loi uniforme sur Θ , $f(x, \theta) d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} dx$, $\psi(\theta) = \theta^2$. Par définition de l'espérance conditionnelle, pour $a \in]0, 1[$,

$$dQ_a(x) = \frac{f(x, \sqrt{a}) + f(x, -\sqrt{a})}{2} dx = h(x, a) dx.$$

Comme la fonction $a \mapsto h(x, a)$ est C^1 et que l'intégrale $a \mapsto \int_E \frac{(h'_a(x, a))^2}{h(x, a)} dx$ est continue, en utilisant [14], p.95, on peut montrer que le modèle $(Q_a)_{a \in \psi(\Theta)}$ vérifie les hypothèses du modèle régulier. Un calcul direct donne $\Gamma_\psi^V[Id](a) = 4a$. Pour comparer $\Gamma_\psi^V[Id]$ et $J^{\psi(V)}$ montrons tout d'abord un lemme.

Lemme 1.3.1 *Soient $(p(\cdot, \theta)d\mu)_{\theta \in \Theta}$ et $(r(\cdot, \theta)d\mu)_{\theta \in \Theta}$ deux modèles réguliers tels que, $\forall x \in E$, la fonction $\theta \mapsto (p(x, \theta), r(x, \theta))$ soit dérivable. Si on pose $s(x, \theta) = p(x, \theta) + r(x, \theta)$, on a*

$$\int \frac{s'^2}{s} d\mu(x) \leq \int \frac{p'^2}{p} d\mu(x) + \int \frac{r'^2}{r} d\mu(x). \quad (1.10)$$

Preuve : On note $\tilde{s} = \sqrt{s}$, $\tilde{p} = \sqrt{p}$, $\tilde{r} = \sqrt{r}$, (1.10) devient alors

$$\int \tilde{s}'^2 d\mu(x) \leq \int \tilde{p}'^2 d\mu(x) + \int \tilde{r}'^2 d\mu(x). \quad (1.11)$$

Un petit calcul montre que

$$(1.11) \Leftrightarrow \tilde{p}'^2 \tilde{r}^2 + \tilde{r}'^2 \tilde{p}^2 \geq 2\tilde{p}\tilde{p}'\tilde{r}'\tilde{r}.$$

Or,

$$\tilde{p}'^2 \tilde{r}^2 + \tilde{r}'^2 \tilde{p}^2 = (\tilde{p}\tilde{r}' - \tilde{p}'\tilde{r})^2 + 2\tilde{p}\tilde{p}'\tilde{r}'\tilde{r}$$

et donc l'inégalité (1.10) est vérifiée avec égalité si et seulement si $\tilde{p}\tilde{r}' = \tilde{p}'\tilde{r}$. \square

D'après le lemme précédent,

$$\frac{1}{J^{\psi(V)}} > \Gamma_\psi^V[Id]. \quad (1.12)$$

Ainsi, on peut voir, sur cet exemple, que le calcul d'erreur fournit une borne d'estimation plus précise qui se traduira par un risque quadratique asymptotique plus petit.

1.4 Structures produit

Nous reprenons les notations introduites dans la partie 1.1.2.

Pour plus de clarté, nous rappelons, en premier lieu, la définition 0.3.5 dans le cas de deux structures d'erreur.

Définition 1.4.1 Soient $S_i = (W_i, \mathcal{W}_i, m_i, \mathbb{D}_i, \Gamma_i)$ ($i=1,2$) deux structures d'erreur. La structure d'erreur produit notée $S_1 \otimes S_2$ est définie comme étant la structure $(W_1 \times W_2, \mathcal{W}_1 \otimes \mathcal{W}_2, m_1 \otimes m_2, \mathbb{D}, \Gamma)$ où

$$\mathbb{D} = \left\{ f \in L^2(m_1 \otimes m_2) \mid \begin{array}{l} \text{pour } m_2 \text{ presque tout } y \ f(., y) \in \mathbb{D}_1 \\ \text{pour } m_1 \text{ presque tout } x \ f(x, .) \in \mathbb{D}_2 \\ \int_{W_1 \times W_2} \Gamma[f](x, y) dm_1(x) dm_2(y) < \infty \end{array} \right\}$$

et, $\forall f \in \mathbb{D}$,

$$\Gamma[f](x, y) = \Gamma_1[f(., y)](x) + \Gamma_2[f(x, .)](y). \quad (1.13)$$

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Plaçons nous dans la situation où nous devons estimer un paramètre $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, à valeurs dans un produit d'ouverts $\Theta_1 \times \Theta_2$. On suppose que ce paramètre est la réalisation de $V = (V_1, V_2) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \Theta_1 \times \Theta_2$ où les variables aléatoires V_1 et V_2 sont indépendantes. La loi de V , notée ρ , vérifie donc la relation suivante :

$$d\rho(\theta_1, \theta_2) = d\rho_1(\theta_1) d\rho_2(\theta_2)$$

où ρ^1 (resp. ρ^2) est la loi de V_1 (resp. V_2). Pour estimer θ_1 (resp. θ_2) on dispose du modèle paramétrique régulier suivant :

$$dP_{\theta_1} = f(x, \theta_1) d\mu(x) \quad (\text{resp. } dQ_{\theta_2} = g(y, \theta_2) d\nu(y))$$

de matrice d'information de Fisher $J_1(\theta_1)$ (resp. $J_2(\theta_2)$) régulière. Nous supposons de plus que l'hypothèse (E) est vérifiée dans les deux cas. On considère X (resp. Z), une variable aléatoire ayant pour loi conditionnelle sachant $V_1 = \theta_1$ (resp. $V_2 = \theta_2$) la loi de densité $f(x, \theta_1) d\mu(x)$ (resp. $g(y, \theta_2) d\nu(y)$). Les variables aléatoires X et Z sont donc les observations qui vont nous permettre d'estimer θ .

On se place ici sous l'hypothèse suivante : (X, V_1) est indépendant de (Z, V_2) . Pour évaluer θ , il est naturel de regarder la loi conditionnelle de (X, Z) sachant $V = (\theta_1, \theta_2)$ qui est notée $R_{(\theta_1, \theta_2)}$. Compte tenu des hypothèses, nous avons

$$dR_{(\theta_1, \theta_2)}(x, y) = f(x, \theta_1) g(y, \theta_2) d\mu(x) d\nu(y).$$

La matrice d'information de Fisher du modèle $(R_{(\theta_1, \theta_2)})_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2}$ est donc la matrice carrée (de taille $p + q$) régulière suivante :

$$\begin{bmatrix} J_1(\theta_1) & 0 \\ 0 & J_2(\theta_2) \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

D'après l'identification fondamentale, $\forall F \in Lip^1(\Theta_1 \times \Theta_2)$,

$$\begin{aligned}\Gamma^V[F](\theta_1, \theta_2) &= [\nabla_{\theta_1} F(\theta_1, \theta_2)]^t [J_1(\theta_1)]^{-1} [\nabla_{\theta_1} F(\theta_1, \theta_2)] \\ &\quad + [\nabla_{\theta_2} F(\theta_1, \theta_2)]^t [J_2(\theta_2)]^{-1} [\nabla_{\theta_2} F(\theta_1, \theta_2)].\end{aligned}\quad (1.15)$$

On est dans le cas où les couples (variables à estimer, observations) sont indépendants. En termes d'erreurs, cela va naturellement se traduire par la notion de structure d'erreur produit sur l'espace $\Theta_1 \times \Theta_2$.

Proposition 1.4.1 1) Le modèle $(R_{(\theta_1, \theta_2)})_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2}$ vérifie l'hypothèse (E) et on a

$$S^V = S^{V_1} \otimes S^{V_2}.$$

2) Si $\psi_1 : \Theta_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\psi_2 : \Theta_2 \rightarrow \mathbb{R}^q$ sont deux changements de variables réguliers alors

$$(\psi_1, \psi_2)_* S^V = \psi_{1*} S^{V_1} \otimes \psi_{2*} S^{V_2}.$$

Avant de démontrer ce résultat nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 1.4.1 Si $f \in Lip^1(\Theta_1)$ et $g \in Lip^1(\Theta_2)$, alors, $fg \in \mathbb{D}^V$ avec, $\forall (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2$,

$$\Gamma^V[fg](\theta_1, \theta_2) = g^2(\theta_2) \Gamma^{V_1}[f](\theta_1) + f^2(\theta_1) \Gamma^{V_2}[g](\theta_2) \quad \rho_1 \otimes \rho_2 \text{-} p \cdot p.$$

Preuve : Soit $(\psi_m)_{m \geq 0}$ une suite de fonctions appartenant à $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et à supports compacts telles que

$$\forall x, \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(x) = x \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} \psi'_m(x) = 1,$$

$$\forall m, \forall x, |\psi_m(x)| \leq |x| \text{ et } |\psi'_m(x)| \leq 1.$$

Par hypothèse, $\forall m \geq 0$, $\psi_m(f)$ et $\psi_m(g)$ sont dans $\mathbb{D}^V \cap L^\infty(\rho_1 \otimes \rho_2)$. Ainsi, d'après [2], p.14, $\psi_m(f)\psi_m(g) \in \mathbb{D}^V$ et on peut voir, de plus, que pour $\rho_1 \otimes \rho_2$ presque tout (θ_1, θ_2) ,

$$\Gamma^V[\psi_m(f)\psi_m(g)](\theta_1, \theta_2) = \psi_m^2(g)(\theta_2) \Gamma^{V_1}[\psi_m(f)](\theta_1) + \psi_m^2(f)(\theta_1) \Gamma^{V_2}[\psi_m(g)](\theta_2).$$

On montre alors par convergence dominée que

$$\psi_m(f)\psi_m(g) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} fg \text{ dans } L^2(\rho_1 \otimes \rho_2)$$

et que

$$\mathcal{E}^V[\psi_n(f)\psi_n(g) - \psi_m(f)\psi_m(g)] \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Le résultat est alors une simple conséquence de la fermeture de \mathcal{E}^V et du fait que

$$\Gamma^V[\psi_m(f)\psi_m(g)] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} g^2 \Gamma^{V_1}[f] + f^2 \Gamma^{V_2}[g] \text{ dans } L^1(\rho_1 \otimes \rho_2). \square$$

Preuve de la proposition 1.4.1 : 1) On note $\mathbb{D}_{V_1 \otimes V_2}$ (resp. $\|\cdot\|_{\mathbb{D}_{V_1 \otimes V_2}}$) le domaine (resp. la norme) de la structure produit $S^{V_1} \otimes S^{V_2}$. On peut voir facilement (définition 1.4.1) que $Lip^1(\Theta_1 \times \Theta_2) \subset \mathbb{D}_{V_1 \otimes V_2}$. De plus, d'après (1.15), pour $F \in Lip^1(\Theta_1 \times \Theta_2)$, on a

$$\mathcal{E}^V[F] = \int_{\Theta_2} \mathcal{E}^{V_1}[F(\cdot, y)] d\rho_2(y) + \int_{\Theta_1} \mathcal{E}^{V_2}[F(x, \cdot)] d\rho_1(x).$$

Ainsi, d'après (1.13), $\|\cdot\|_{\mathbb{D}^V}$ coïncide sur $Lip^1(\Theta_1 \times \Theta_2)$ avec $\|\cdot\|_{\mathbb{D}_{V_1 \otimes V_2}}$, l'hypothèse (E) est donc vérifiée pour le modèle $(R_{(\theta_1, \theta_2)})_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2}$. Or, $Lip^1(\Theta_1 \times \Theta_2)$ étant dense dans $(\mathbb{D}^V, \|\cdot\|_{\mathbb{D}^V})$, $\mathbb{D}^V \subset \mathbb{D}_{V_1 \otimes V_2}$ et on a coïncidence des opérateurs carré du champ sur \mathbb{D}^V .

Pour obtenir l'inclusion contraire, on utilise le fait que les éléments de la forme $F = fg$ avec $f \in \mathbb{D}^{V_1}$ et $g \in \mathbb{D}^{V_2}$ sont denses dans $(\mathbb{D}_{V_1 \otimes V_2}, \|\cdot\|_{\mathbb{D}_{V_1 \otimes V_2}})$ ([2], p.201). Pour conclure, il suffit de montrer qu'un tel élément est dans \mathbb{D}^V .

On se donne $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$) une suite d'éléments de $Lip^1(\Theta_1)$ (resp. $Lip^1(\Theta_2)$) vérifiant $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans $L^2(\rho_1)$ (resp. $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ dans $L^2(\rho_2)$) et $\mathcal{E}^{V_1}[f_n - f_m] \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ (resp. $\mathcal{E}^{V_2}[g_n - g_m] \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$). En posant $F_n = f_n g_n$, on peut voir que $F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F$ dans $L^2(\rho_1 \otimes \rho_2)$. De plus, en utilisant le lemme 1.4.1 et [2], exercice 3.5, p.16, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{D}^V$ avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{E}^V[F_n - F_m] &\leq \mathcal{E}^V[(f_n - f_m)g_n] + \mathcal{E}^V[(g_n - g_m)f_m] \\ &\leq \mathcal{E}^{V_1}[f_n - f_m] \|g_n\|_{L^2(\rho_2)}^2 + \mathcal{E}^{V_1}[f_m] \|g_n - g_m\|_{L^2(\rho_2)}^2 \\ &\quad + \mathcal{E}^{V_2}[g_n - g_m] \|f_m\|_{L^2(\rho_1)}^2 + \mathcal{E}^{V_2}[g_n] \|f_n - f_m\|_{L^2(\rho_1)}^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{E}^V[F_n - F_m] \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi, par fermeture, $F \in \mathbb{D}^V$ et on a le résultat voulu.

2) Provient de 1) et des résultats de la section 1.2. \square

Remarque 11 : Les résultats de cette section se généralisent à un nombre fini de paramètres. De plus, sachant que l'on peut envisager des produits infinis dénombrables de structures d'erreur (définition 0.3.5), on est en mesure d'obtenir par des voies statistiques un calcul d'erreur pour des grandeurs de type $\theta = (\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en raisonnant comme ci-dessus composante par composante. \bullet

1.5 Le choix de la probabilité a priori ρ

Dans les sections précédentes, le choix de la loi a priori sur l'espace des paramètres Θ est laissé au praticien comme en analyse bayésienne. La détermination

de la structure d'erreur S^V peut donc apparaître, en un certain sens, incomplète. De plus, dans l'identification fondamentale, la loi *a priori* n'intervient pas, si ce n'est dans la condition technique (E). On peut donc choisir ρ parmi une grande variété de probabilités, soit obtenue par les statistiques, soit provenant de raisons physiques.

Si on n'a pas d'idées précises, nous allons montrer que, lorsque un modèle paramétrique régulier est choisi, un candidat se dégage naturellement : la loi *a priori* de Jeffreys ([12], p.490). Cette probabilité bien connue en analyse bayésienne possède une remarquable stabilité concernant le calcul d'erreur : elle est compatible avec la notion d'image et de produit.

Remarque 12 : Nous avons vu en introduction (section 0.2.1) que le calcul d'erreur fournit sans hypothèses supplémentaires un calcul de biais. Ainsi l'identification fondamentale permet un calcul de biais en considérant le générateur infinitésimal A^V associé à S^V . Contrairement à l'opérateur carré du champ Γ^V , l'opérateur A^V dépend fortement du choix de ρ .•

Soit $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ un modèle régulier tel que

$$K = \int_{\Theta} \sqrt{\det(J(\theta))} d\theta < \infty.$$

On peut définir sur Θ la mesure de probabilité suivante

$$\rho^V(d_\theta) = \frac{I_\Theta \sqrt{\det(J(\theta))} d\theta}{K}$$

appelée la loi *a priori* de Jeffreys induite par le modèle $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Cette mesure est souvent utilisée en analyse bayésienne pour sa propriété d'invariance aux changements de variables réguliers (voir proposition ci-dessous). De plus, elle est la mesure *a priori* qui possède la plus faible influence sur la loi *a posteriori* au sens de l'information asymptotique de Shannon ([13]). En termes de calcul d'erreur, ses propriétés sont résumées dans la proposition suivante dont la preuve, qui se déduit aisément des propriétés classiques de l'information de Fisher, est laissée au lecteur.

Proposition 1.5.1 a) Si $\psi : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un changement de variable régulier, $\psi_* \rho^V = \rho^{\psi(V)}$.

b) Dans le cadre de la section 1.4, on a $\rho^V = \rho^{V_1} \otimes \rho^{V_2}$.

Remarque 13 : Lorsque l'on choisit pour loi *a priori* la loi de Jeffreys, l'hypothèse de fermabilité (E) impose uniquement des conditions sur la matrice d'information de Fisher.•

Appendice : Rappels de statistiques asymptotiques

Nous nous plaçons dans le cadre de la section 1.3.3. Le but de cet appendice est de rappeler succinctement les principaux résultats de convergence de l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le vecteur (X_1, \dots, X_n) est, sachant V , un n -échantillon du modèle régulier $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Nous supposons, pour simplifier les choses, que Θ est un ouvert borné et convexe de \mathbb{R} . Nous renvoyons le lecteur à [10] pour la démonstration des résultats exposés.

Les techniques asymptotiques présentées dans cet appendice sont largement exposées dans [9] et [10]. Elles ont le mérite d'être généralisables à un cadre beaucoup plus vaste que celui des expériences réalisées à partir d'observations de n -échantillons (notamment pour les applications en statistique des processus). Elles reposent sur des techniques de grandes déviations et sont donc en rupture avec l'approche historique qui consistait à utiliser des développements de Taylor ([12], p.469).

L'idée essentielle d'Ibragimov et Has'minskii a été d'étudier le rapport de vraisemblance

$$Z_{n,\theta}(u) = \prod_{i=1}^n \frac{f(X_i, \theta + \frac{u}{\sqrt{n}})}{f(X_i, \theta)} \quad \text{avec } u \in U_{n,\theta} = \{u \in \mathbb{R} \mid \theta + \frac{u}{\sqrt{n}} \in \Theta\}$$

dont le comportement asymptotique est relié à celui de l'estimateur du maximum de vraisemblance par l'inégalité

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) > H \mid V = \theta) \leq \mathbb{P}(\sup_{|u| > H} Z_{n,\theta}(u) \geq 1 \mid V = \theta).$$

On peut voir, de plus, que cette quantité est liée à la distance de Hellinger par la relation suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_{n,\theta}^{\frac{1}{2}}(u) \mid V = \theta] = 1 - \frac{1}{2}r(P_{\theta + \frac{u}{\sqrt{n}}}^n, P_\theta^n).$$

On rappelle que pour un modèle paramétrique dominé $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$, la distance de Hellinger r est définie par

$$r(P_\theta, P_{\theta'}) = \int_E (\sqrt{f(x, \theta)} - \sqrt{f(x, \theta')})^2 d\mu(x).$$

Cette distance mesure l'identifiabilité de notre modèle c'est à dire sa capacité à différencier deux valeurs de θ . Heuristiquement, le comportement de la distance de Hellinger et donc du rapport de vraisemblance conditionne la qualité de l'estimation.

Le théorème ci-dessous donne des conditions suffisantes pour la consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Théorème A1 : ([10], p.42) *On suppose que*

- 1) $\forall \theta \in \Theta, \forall n \in \mathbb{N}^*,$ la fonction $u \in U_{n,\theta} \mapsto Z_{n,\theta}(u)$ est continue
- 2) $\forall \theta \in \Theta, \exists M > 0, \exists m > 0$ tels que, $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\sup_{\substack{u_1, u_2 \in U_{n,\theta} \\ |u_1| \leq R, |u_2| \leq R}} |u_1 - u_2|^{-2} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|Z_{n,\theta}^{\frac{1}{2}}(u_1) - Z_{n,\theta}^{\frac{1}{2}}(u_2)|^2 \mid V = \theta] \leq M(1 + R^m)$$

- 3) $\exists a > 0$ tel que, $\forall u \in U_{n,\theta}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_{n,\theta}^{\frac{1}{2}}(u) \mid V = \theta] \leq e^{-a|u|^2}.$$

Alors, $\forall \theta \in \Theta, \exists B > 0, \exists b > 0$ tels que, $\forall \varepsilon > 0,$ pour n suffisamment grand, on ait

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I_{\sqrt{n}|\widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \varepsilon} \mid V = \theta] \leq B e^{-b\varepsilon^2}.$$

On a donc, en particulier, la convergence en probabilité et presque sûre de $(\widehat{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers θ .

Remarque A1 : i) On voit que l'hypothèse 3) du théorème implique l'identifiabilité du modèle. Ceci est indispensable car on ne peut jamais trouver d'estimateur consistant dans le cadre d'un modèle non identifiable.

ii) Il existe une version uniforme en θ de ce théorème : si on se donne un compact $K \subset \Theta$ et si les hypothèses 2) et 3) du théorème A1 sont vérifiées uniformément en $\theta \in K,$ alors, $\exists b(K) > 0, \exists B(K) > 0$ tels que $\forall \varepsilon > 0,$ pour n suffisamment grand, on ait

$$\sup_{\theta \in K} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I_{\sqrt{n}|\widehat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon} \mid V = \theta] \leq B(K) e^{-b(K)\varepsilon^2}. \bullet$$

En dépit de leur caractère contraignant, les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées dans le cadre d'un modèle régulier sous des hypothèses assez simples :

Proposition A1 : ([10], p.185) *Dans le cadre du modèle régulier, si on a*

- 1) $0 < \inf_{\Theta} J(\theta) \leq \sup_{\Theta} J(\theta) < \infty$
- 2) $\forall \theta \in \Theta, \forall \delta > 0,$

$$\inf_{u \in U_{1,\theta}, |u| > \delta} r(P_{\theta}, P_{\theta+u}) > 0,$$

alors, les hypothèses du théorème A1 sont vérifiées.

En vue d'applications statistiques, le résultat suivant est très utile pour la construction d'intervalles de confiance en précisant la vitesse de convergence. On peut noter, qu'au même titre que le théorème A1, il possède une extension uniforme.

Théorème A2 : ([10], p.185) *On suppose que les hypothèses du théorème A1 sont vérifiées. Si, de plus, le modèle suit la condition de normalité asymptotique locale introduite par Le Cam : $\forall \theta \in \Theta$, la suite de processus $(Z_{n,\theta})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge au sens des marginales fini-dimensionnelles vers le processus $Z_\theta(u) = e^{u\Delta - \frac{1}{2}J(\theta)u^2}$ où Δ est une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{N}(0, J(\theta))$, alors, $\forall \theta \in \Theta$, on a*

- 1) Sachant $V = \theta$,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{P})} \mathcal{N}(0, \frac{1}{J(\theta)})$$

2) $\forall p > 0$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[n^{\frac{p}{2}}(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta)^p \mid V = \theta] \rightarrow m_p$$

où m_p est le p -ième moment de la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{J(\theta)})$.

Remarque A2 : i) Sous les hypothèses précédentes, l'estimateur du maximum de vraisemblance réalise de manière asymptotique la borne de l'inégalité de Cramer-Rao.

ii) Sous les hypothèses du modèle régulier on peut montrer que J est continue ([10], p.65). Ainsi, la construction de régions de confiance asymptotiques de niveau donné s'effectue de manière classique en considérant les intervalles de la forme

$$]\hat{\theta}_n - \frac{a}{\sqrt{nJ(\hat{\theta}_n)}}, \hat{\theta}_n + \frac{b}{\sqrt{nJ(\hat{\theta}_n)}}[. \bullet$$

La proposition suivante précise une propriété très importante des modèles réguliers.

Proposition A2 : ([10], p.114) *Sous les hypothèses du modèle régulier, la condition de normalité asymptotique locale est vérifiée.*

Bibliographie

- [1] A. Borovkov, *Statistique Mathématique*, Editions Mir, 1987.
- [2] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter, Berlin, 1991.
- [3] N. Bouleau, *Error calculus for finance and physics : the language of Dirichlet forms*, de Gruyter, Berlin, 2003.
- [4] N. Bouleau, Some remarks on axiomatized languages and extension tools : focus on probability theory and error calculus with Dirichlet forms, *Butl. Soc. Catalana Mat.* **18** (2003), no. 2, 25–37.
- [5] N. Bouleau and C. Chorro, Error structures and parameter estimation, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), no. 4, 305–310.
- [6] L. D. Brown and L. Gajek, Information inequalities for the Bayes risk, *Ann. Statist.* **18** (1990), no. 4, 1578–1594.
- [7] R.A. Fisher, Theory of statistical information, *Proc. Cambridge Philo. Soc.* **22**, 1925.
- [8] M. Fukushima, Y. Ōshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter, Berlin, 1994.
- [9] V. Genon-Catalot and D. Picard, *Éléments de statistique asymptotique*, Springer, Paris, 1993.
- [10] I. A. Ibragimov, R. Z. Has'minskiĭ and *Statistical estimation*, Translated from the Russian by Samuel Kotz, Springer, New York, 1981.
- [11] D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction to stochastic calculus applied to finance*, Translated from the 1991 French original by Nicolas Rabeau and Francois Mantion, Chapman & Hall, London, 1996.
- [12] E. L. Lehmann, *Elements of large-sample theory*, Springer, New York, 1999.
- [13] E. L. Lehmann and G. Casella, *Theory of point estimation*, Second edition, Springer, New York, 1998.
- [14] A.W Van der Vaart, *Asymptotic Statistics*, Cambridge series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 1998.

Chapitre 2

Domaine vectoriel d'une structure d'erreur

Dans les deux derniers chapitres de cette thèse, nous étendrons deux résultats asymptotiques classiques de la théorie des probabilités (le théorème de la limite centrale dans les espaces de Hilbert et le théorème de Donsker) aux cas des structures d'erreur. Cependant, les techniques présentées dans l'introduction nous permettent, pour l'instant, de traiter uniquement des situations de type finidimensionnelles. En effet, le calcul fonctionnel lipschitzien (proposition 0.2.2), la Dirichlet indépendance (définition 0.4.1) et la convergence en loi de Dirichlet (définition 0.4.2) ont été définis pour des variables aléatoires appartenant à \mathbb{D}^p . Le but de ce chapitre est d'introduire les outils techniques nécessaires à la prise en compte, par le calcul d'erreur, de grandeurs à valeurs dans des espaces de dimensions infinies. Nous avons adopté pour cela une présentation originale qui met en lumière la robustesse de la notion de domaine vectoriel d'une structure d'erreur et ses remarquables propriétés.

Plan du chapitre 2 : Dans [10], Feyel et de La Pradelle proposent une construction naturelle d'espaces de Sobolev gaussiens vectoriels. Il s'agit en fait d'étendre le domaine de la forme de Dirichlet canonique sur l'espace de Wiener ([2], p.78) pour des variables à valeurs banachiques. Cette approche se généralise, sous des hypothèses peu contraignantes, aux structures d'erreur ([2], p.266, [8], chap.1). Dans la partie 1, nous rappelons la définition, les conditions d'existence et les propriétés de l'opérateur gradient que l'on peut associer à une structure d'erreur. Lorsqu'un tel opérateur existe, il est possible d'adapter la procédure de Feyel et de La Pradelle et de définir le domaine vectoriel d'une structure d'erreur. Nous présentons cette définition dans la partie 2 et étudions l'extension des propriétés du domaine (stabilité par les fonctions lipschitziennes, construction de la structure image) au domaine vectoriel. La partie 3 est consacrée à l'étude d'un exemple lié à la simulation de processus gaussiens à l'aide de séries aléatoires.

2.1 L'opérateur gradient

Considérons une structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$. Une des caractéristiques de l'opérateur Γ est d'être bilinéaire, ainsi, les calculs peuvent parfois s'avérer fastidieux. Il est souvent possible et commode d'introduire un opérateur linéaire, appelé le gradient, dont dérive Γ . Adoptons les notations suivantes : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et (Ω, \mathcal{A}, m) un espace de probabilité, $L^2(m; E)$ désignera l'ensemble des fonctions mesurables $F : \Omega \rightarrow E$ telles que $\mathbb{E}_m[\|F\|_E^2] < \infty$.

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1 *La structure d'erreur S possède un gradient si la propriété suivante (notée (G)) est vérifiée : Il existe un espace de Hilbert séparable $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ et un opérateur ∇ de \mathbb{D} dans $L^2(P; \mathcal{H})$, appelé le gradient, tel que*

$$\forall U \in \mathbb{D}, \quad \|\nabla U\|_{\mathcal{H}}^2 = \Gamma[U].$$

Le résultat suivant ([2], p.242) dû à Mokobodski assure que la propriété (G) n'est pas trop restrictive. Elle est notamment vérifiée par toutes les structures d'erreur considérées dans [4]. Notons qu'en pratique, un candidat naturel se dégage toujours, ainsi, la preuve de l'existence d'un gradient sera plus souvent constructive que théorique.

Proposition 2.1.1 *Un gradient existe dès que l'espace $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_{\mathbb{D}})$ est séparable.*

En vertu du calcul fonctionnel vérifié par Γ , il est facile de voir qu'un opérateur gradient suit la règle de dérivation des fonctions composées.

Proposition 2.1.2 *Si ∇ est un gradient associé à S , $\forall U \in \mathbb{D}^d$, $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap \text{Lip}$,*

$$\nabla[F(U)] = \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(U) \nabla[U_i]. \quad (2.1)$$

Enfin, la propriété (G) est compatible avec la notion de produit de structures d'erreur : si chaque terme d'un produit de structures d'erreur possède un gradient, il est possible de construire explicitement un gradient pour la structure produit ([4], p.79). En revanche, le comportement du gradient vis à vis de l'image d'une structure d'erreur n'est pas bon en général. Récemment ([6]), Bouleau a démontré qu'il était cependant possible, lorsque la propriété (G) est vérifiée, de construire un gradient particulier, à valeurs dans un espace de mesures, compatible avec le passage à l'image.

2.1.2 L'opérateur de dérivation

L'opérateur de dérivation est un gradient particulier qui est construit avec une copie $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$ de l'espace de probabilité initial. Il interviendra dans la définition du domaine vectoriel et nous verrons que, dans le cas gaussien, il permet, grâce à sa compatibilité avec le calcul d'Itô, de calculer aisément les erreurs sur les solutions d'équations différentielles stochastiques.

Définition 2.1.2 Soit J une isométrie entre \mathcal{H} et $L^2(\widehat{P})$. Pour $U \in \mathbb{D}$, nous notons $U^\#$ la "dérivée" de U définie par

$$U^\# = J(\nabla U) \in L^2(P \otimes \widehat{P}).$$

De plus, nous pouvons toujours supposer (ce que nous ferons) que $\forall h \in \mathcal{H}$, $\mathbb{E}_{\widehat{P}}[J(h)] = 0$. La variable aléatoire $U^\#$ sera donc centrée.

Remarque 1 : La terminologie précédente est issue du cas classique sur l'espace de Wiener où $\#$ est l'opérateur de dérivation au sens de Fréchet et où ∇ peut s'interpréter en terme de gradient directionnel (dans la direction de l'espace de Cameron-Martin) ([2], chap.2).•

2.2 Le domaine vectoriel

2.2.1 Définition

Soit B un espace de Banach séparable et B' son dual topologique. Nous pouvons alors définir le domaine vectoriel de S vérifiant (G), le symbole \langle, \rangle désignant la dualité entre B et B' .

Définition 2.2.1 On note \mathbb{D}_B l'espace vectoriel des variables aléatoires U dans $L^2(P; B)$ telles qu'il existe g dans $L^2(P \otimes \widehat{P}; B)$ telle que

$$\forall \lambda \in B', \langle \lambda, U \rangle \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad \langle \lambda, U \rangle^\# = \langle \lambda, g \rangle.$$

On pose alors $g = U^\#$ et on équipe \mathbb{D}_B de la norme

$$\| U \|_{\mathbb{D}_B} = \left(\| U \|_{L^2(P; B)}^2 + \frac{1}{2} \| U^\# \|_{L^2(P \otimes \widehat{P}; B)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Ainsi, $\mathbb{D}_{\mathbb{R}^d} = \mathbb{D}^d$).

Cette définition dépend en général du choix de l'opérateur de dérivation. Cependant, lorsque B est un espace de Hilbert séparable, on a la proposition suivante qui est une conséquence immédiate de la définition précédente et de la propriété de fermeture de la forme \mathcal{E} :

Proposition 2.2.1 *Soit B un espace de Hilbert séparable. Si $U \in L^2(P; B)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $U \in \mathbb{D}_B$.

ii) *Il existe une base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de B telle que, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\langle e_i, U \rangle \in \mathbb{D}$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{E}[\langle e_i, U \rangle] < \infty$.*

iii) *Pour toute base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de B , $\forall i \in \mathbb{N}$, nous avons $\langle e_i, U \rangle \in \mathbb{D}$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{E}[\langle e_i, U \rangle] < \infty$.*

Dans ce cas, \mathbb{D}_B n'est autre que le produit tensoriel hilbertien entre \mathbb{D} et B .

Remarque 2 : Il existe une autre méthode pour construire un domaine vectoriel d'une structure d'erreur à partir de l'opérateur potentiel associé à \mathcal{E} ([8], chap.1). Cette construction coïncide (à isomorphisme près) avec la définition 2.2.1 lorsque B est un espace de Banach dit "2-admissible" ([11], p.64). C'est le cas notamment lorsque B est un espace de Hilbert séparable. Ainsi, dans le chapitre 3, les hypothèses utilisées pour établir l'extension du théorème de la limite centrale hilbertien seront, en vertu de la proposition 2.2.1 et de la remarque ci-dessus, canoniques. Dans le chapitre 4, où l'on s'intéresse à des variables aléatoires à valeurs dans l'espace de Wiener (dont la conjecture qu'il n'est pas "2-admissible" a été posée), l'appartenance de l'approximation de Donsker et des intégrales associées à un domaine vectoriel sera un outil purement technique, une simple conséquence d'hypothèses indépendantes du choix d'une définition. •

2.2.2 Stabilité du domaine vectoriel et calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap \text{Lip}$

Nous supposerons, jusqu'à la fin de ce chapitre, que l'espace de Banach séparable B vérifie la propriété d'approximation suivante :

(A) : *Il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs linéaires de B dans B , continus et de rangs finis telle que, $\forall x \in B$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = x$.*

En particulier, cette hypothèse est vérifiée dans le cas d'un espace de Hilbert, de l'espace de Wiener sur $[0, 1]$ ou, plus généralement, lorsque B possède une base de Schauder. On a alors le résultat suivant qui est une extension de la proposition 0.2.2.

Proposition 2.2.2 *Soit F une contraction de B dans \mathbb{R} . Si $U \in \mathbb{D}_B$, alors, $F(U) \in \mathbb{D}$ et $\Gamma[F(U)] \leq \mathbb{E}_{\hat{P}}[\|U^\# \|_B^2]$. De plus, si nous supposons que F est de classe C^1 ,*

$$F(U)^\# = \langle F'(U), U^\# \rangle. \quad (2.2)$$

Preuve : Supposons en premier lieu que $F \in C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'approximation cylindrique de F par $F_n = F \circ P_n$. D'après le théorème de Banach Steinhaus, la propriété (A) entraîne $\sup_{N \in \mathbb{N}} \|P_N\| < \infty$, ainsi, par convergence dominée,

$$F_n(U) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(U) \text{ dans } L^2(P).$$

De plus, comme F_n est une fonction cylindrique, la proposition 2.1.2 entraîne $F_n(U) \in \mathbb{D}$ et $F_n(U)^\# = \langle F'(P_n(U)), P_n(U)^\# \rangle$. On obtient alors facilement que

$$F_n(U)^\# \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle F'(U), U^\# \rangle \text{ dans } L^2(P \otimes \widehat{P}).$$

En utilisant la fermeture de l'opérateur de dérivation (qui est une conséquence immédiate de la fermeture de la forme \mathcal{E} associée), on a le résultat.

Lorsque F est seulement contractante, le résultat provient d'une adaptation de la preuve du théorème 2.2.3, [2], p.140. \square

2.2.3 Image généralisée d'une structure d'erreur

La proposition 2.2.2 nous permet, en utilisant la définition 0.3.4 avec $\mathcal{A} = C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip$, de généraliser la définition 0.3.3 lorsque $U \in \mathbb{D}_B$.

Définition 2.2.2 Soit $U \in \mathbb{D}_B$, le quintuplet $(B, \mathcal{B}(B), U_*P, C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip, \Gamma_U)$ où $\forall F \in C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip$, $\Gamma_U[F] = \mathbb{E}_P[\Gamma[F(U)]|U]$, est une pré-structure d'erreur fermable. On note U_*S sa plus petite extension fermée qui est une structure d'erreur appelée l'image de S par U ou la \mathbb{D} -loi de U .

Remarque 3 : Choisissons $U \in \mathbb{D}_B$ et supposons que B possède une base de Schauder. Pour toute base de Schauder $\beta = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de B , l'ensemble de fonctions cylindriques

$$\mathcal{A}_\beta = \{F(\langle e_{i_1}, \cdot \rangle, \dots, \langle e_{i_n}, \cdot \rangle); n \in \mathbb{N}^*, (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n, F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip\}$$

satisfait les hypothèses de la définition 0.3.4. On peut donc définir $U_*^{\mathcal{A}_\beta} S$. Comme $U \in \mathbb{D}_B$, il est facile de voir, en s'inspirant de la preuve de la proposition 2.2.2, que $\forall \beta$,

$$U_*S = U_*^{\mathcal{A}_\beta} S.$$

La définition de l'image est alors canonique, au sens où elle ne dépend pas du choix d'une base. \bullet

2.2.4 Structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener

Plaçons nous dans le cadre de l'exemple 5 de l'introduction. Soit

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0, 1), H^1(\mathcal{N}(0, 1)), \gamma[u] = u'^2)^\mathbb{N},$$

la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les applications coordonnées de S . Chaque facteur possédant un gradient $D : f \in H^1(\mathcal{N}(0, 1)) \rightarrow f' \in L^2(\mathcal{N}(0, 1))$, en vertu de [4], p.79, nous en déduisons un gradient ∇ pour S , à valeurs dans $L^2(P; L^2([0, 1], dx))$, en posant $\forall F \in \mathbb{D}, \forall t \in [0, 1]$,

$$\nabla[F](t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial g_n} \chi_n(t) \quad (2.3)$$

où $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2([0, 1], dx)$ (d'après la définition 0.3.5, la série (2.3) est convergente P -p.p.).

En notant $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$ une copie de (W, \mathcal{W}, P) et $(\widehat{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les applications coordonnées correspondantes, nous construisons, de manière naturelle, un opérateur de dérivation $\#$ pour S défini, $\forall F \in \mathbb{D}$, par

$$F^\# = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial g_n} \widehat{g}_n \quad (2.4)$$

(l'isométrie J sous-jacente étant définie par la relation $J(\chi_n) = \widehat{g}_n, \forall n \in \mathbb{N}$).

Soit $\mathcal{C} = C_0([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} nulles en zéro. Cet espace vérifie la propriété (A) et on note $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ le domaine vectoriel associé. Il est alors facile de voir que le processus continu défini sur $[0, 1]$ par

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \chi_n(s) ds g_n$$

appartient à $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ et que

$$B_t^\# = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \chi_n(s) ds \widehat{g}_n.$$

La structure image de S par $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ (au sens de la définition 2.2.2) sera notée dorénavant

$$S_{OU} = (\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu, \mathbb{D}_{OU}, \Gamma_{OU})$$

(où μ est la mesure de Wiener sur \mathcal{C}) et est appelée la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. Elle possède un opérateur gradient ∇_{OU} qui n'est autre que le gradient au sens de Malliavin dont l'adjoint étend l'intégrale d'Itô ([18]) et auquel on associe un opérateur de dérivation $\#_{OU}$. Par abus de

notations, nous noterons $(B_t)_{t \in [0,1]}$ le processus défini sur \mathcal{C} par $B_t : f \in \mathcal{C} \rightarrow f(t)$ et qui est, sous μ , un mouvement Brownien. Lorsque $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$, on a, d'après la définition 2.2.2,

$$\Gamma_{OU}[F](x) = \int_{\mathcal{C}} \langle F'(x), y \rangle^2 d\mu(y),$$

ainsi, si $F = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathcal{C}')^n$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$, alors,

$$\Gamma_{OU}[F] = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle_{L^2([0,1], dx)}. \quad (2.5)$$

La structure S_{OU} est bien, en accord avec la définition 0.3.6, de type Ornstein-Uhlenbeck.

Cette structure a été étudiée par de nombreux auteurs ([2], [10], [18], [20]). En particulier ([2], chap.4), lorsque $\sigma : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient des conditions de régularité de type lipschitzien, la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt, \quad X_0 = x,$$

appartient à $(\mathbb{D}_{OU})_{\mathcal{C}}$. En renforçant les hypothèses de dérivabilité sur σ et b , on peut voir, de plus, que $X_t^{\#OU}$ vérifie l'équation suivante :

$$dX_t^{\#OU} = \sigma_2'(t, X_t)X_t^{\#OU} dB_t + \sigma(t, X_t)d\widehat{B}_t + b_2'(t, X_t)X_t^{\#OU} dt$$

où $(\widehat{B}_t)_{t \in [0,1]}$ est le mouvement Brownien associé à une copie $(\widehat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{B}}(\widehat{\mathcal{C}}), \widehat{\mu})$ de l'espace de Wiener initial. Ainsi, le calcul de $\Gamma_{OU}[X_t] = \mathbb{E}_{\widehat{\mu}}[(X_t^{\#OU})^2]$ peut être mené, de manière simple et explicite, en utilisant le calcul d'Itô pour développer $(X_t^{\#OU})^2$. Cela permet l'étude de la sensibilité dans des modèles financiers Markoviens plus raffinés que le modèle de Black-Scholes, en dépit de l'absence de formules fermées ([4], p.165).•

2.2.5 Dirichlet indépendance

La définition 2.2.2 nous permet d'étendre la notion de Dirichlet indépendance (définition 0.4.1) aux éléments du domaine vectoriel :

Définition 2.2.3 Soient $(U, V) \in (\mathbb{D}_B)^2$, U et V sont Dirichlet indépendantes si

$$U_*S \otimes V_*S = (U, V)_*S.$$

De plus, le théorème 0.4.1 de caractérisation reste valide dans notre contexte.

Proposition 2.2.3 *Deux variables aléatoires U et V dans \mathbb{D}_B sont Dirichlet indépendantes si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :*

- a) U et V sont indépendantes sur l'espace (W, \mathcal{W}, P) .
- b) $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in B'^2, \mathbb{E}_P[\Gamma[\lambda_1(U), \lambda_2(V)]|U, V] = 0$ P -p.p.
- c) $\forall \lambda \in B', \mathbb{E}_P[\Gamma[\lambda(U)]|U, V] = \mathbb{E}_P[\Gamma[\lambda(U)]|U]$ P -p.p.
- d) $\forall \lambda \in B', \mathbb{E}_P[\Gamma[\lambda(V)]|U, V] = \mathbb{E}_P[\Gamma[\lambda(V)]|V]$ P -p.p.

Bien que le schéma de la preuve soit similaire à celui du théorème 0.4.1 ([2], p.218), nous en donnons une rédaction détaillée car certains points peuvent paraître ambigus.

Définissons les ensembles fonctionnels suivants :

$$C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip = \{F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip \text{ et bornée}\}$$

$$\mathcal{A}_B = \{F(\lambda_1, \dots, \lambda_n); n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (B')^n \text{ et } F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip\},$$

$$\mathcal{A}_B^b = \{F(\lambda_1, \dots, \lambda_n); n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (B')^n \text{ et } F \in C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip\}.$$

Nous aurons besoin d'un lemme technique.

Lemme 2.2.1 *Soient U et V deux éléments de \mathbb{D}_B indépendants sur l'espace de probabilité (W, \mathcal{W}, P) . Si U et V sont Dirichlet indépendants, alors, pour toutes fonctions $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) \in C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip$ et bornées,*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\varphi_1(U)\psi_1(V), \varphi_2(U)\psi_2(V)] &= \mathcal{E}[\varphi_1(U), \varphi_2(U)] \langle \psi_1(V), \psi_2(V) \rangle_{L^2(P)} \\ &+ \mathcal{E}[\psi_1(V), \psi_2(V)] \langle \varphi_1(U), \varphi_2(U) \rangle_{L^2(P)}. \end{aligned}$$

Réciproquement, si l'égalité précédente a lieu $\forall (\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) \in (\mathcal{A}_B^b)^4$, U et V sont Dirichlet indépendants.

Remarque 4 : Les variables $\varphi_1(U)\psi_1(V)$ et $\varphi_2(U)\psi_2(V)$ appartiennent à \mathbb{D} car $\mathbb{D} \cap L^\infty(P)$ est une algèbre ([2], p.14).•

Preuve du lemme : Le fait que la condition soit nécessaire est une simple conséquence de la définition 2.2.3. On note $\mathbb{D}_{(U,V)}$ (resp. $\mathbb{D}_{U \otimes V}$) le domaine de $(U, V)_*S$ (resp. $U_*S \otimes V_*S$). Pour démontrer la condition suffisante, il nous suffit de montrer que $\mathcal{A}_B^b \otimes \mathcal{A}_B^b$ est dense dans $\mathbb{D}_{(U,V)}$ et $\mathbb{D}_{U \otimes V}$.

Pour $\mathbb{D}_{U \otimes V}$, nous savons, en utilisant la proposition 2.1.3, [2], p.201, que $\mathbb{D}_U \otimes \mathbb{D}_V$ est dense dans $\mathbb{D}_{U \otimes V}$. Ainsi, nous déduisons de la définition 2.2.2 que $C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip \otimes C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip$ est dense dans $\mathbb{D}_{U \otimes V}$. Comme B vérifie la propriété d'approximation (A), un argument similaire à celui utilisé dans la preuve de la proposition 2.2.2 entraîne la densité de $\mathcal{A}_B \otimes \mathcal{A}_B$ dans $\mathbb{D}_{U \otimes V}$. Enfin, la densité de $\mathcal{A}_B^b \otimes \mathcal{A}_B^b$ dans $\mathcal{A}_B \otimes \mathcal{A}_B$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{D}_{U \otimes V}}$ est une conséquence de la densité, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de $C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$ dans $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$ pour la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées premières.

Pour $\mathbb{D}_{(U,V)}$, nous avons, par un argument identique, la densité de $\mathcal{A}_{B^2}^b$ dans $\mathbb{D}_{(U,V)}$. La conclusion provient alors du fait que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip \otimes C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$ est dense dans $C_b^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) \cap Lip$ pour la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées premières. \square

Preuve de la proposition 2.2.3 : Si nous supposons a), b), c) et d), il est facile de voir en utilisant le calcul fonctionnel que les conditions du lemme 2.2.1 sont vérifiées.

Réciproquement, supposons que U et V sont Dirichlet indépendantes. Considérons les fonctions suivantes : $\varphi_1(x) = e^{i(\lambda_1(x)+t\lambda_2(x))}$, $\varphi_2(x) = e^{i(\lambda_1(x)-t\lambda_2(x))}$, $\psi_1(x) = e^{i(\lambda_3(x)+s\lambda_4(x))}$, $\psi_2(x) = e^{i(\lambda_3(x)-s\lambda_4(x))}$ avec $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in (B')^4$. En utilisant la caractérisation de la Dirichlet indépendance démontrée dans le lemme 2.2.1, nous obtenons une égalité entre deux polynômes homogènes de degré 2 en les variables (s, t) . L'identification des termes en t^2 conduit à l'égalité

$$\mathbb{E}_P [e^{2i\lambda_1(U)} \Gamma[\lambda_2(U)]] \mathbb{E}_P [e^{2i\lambda_3(V)}] = \mathbb{E}_P [e^{2i(\lambda_1(U)+\lambda_3(V))} \Gamma[\lambda_2(U)]] ,$$

ainsi comme les variables U et V sont indépendantes,

$$\mathbb{E}_P [e^{2i(\lambda_1(U)+\lambda_3(V))}] \mathbb{E}_P [\Gamma[\lambda_2(U)|U]] = \mathbb{E}_P [e^{2i(\lambda_1(U)+\lambda_3(V))} \Gamma[\lambda_2(U)]] .$$

La relation c) est alors une conséquence de l'unicité de la transformée de Fourier. La relation d) (resp. b)) est obtenue en identifiant les termes en s^2 (resp. st). \square

Exemple : Nous nous plaçons dans le cadre de la section 2.2.4. Soient f et h appartenant à $L^2([0, 1], dx)$ et vérifiant $fh = 0$. Il est facile de voir que les processus continus $(\int_0^t f(s)dB_s)_{t \in [0,1]}$ et $(\int_0^t h(s)dB_s)_{t \in [0,1]}$ appartiennent à $(\mathbb{D}_{OU})_C$ et sont, en vertu de la proposition 2.2.3, Dirichlet indépendants. \bullet

2.2.6 Convergence en loi de Dirichlet

Nous étendons la notion de convergence en loi de Dirichlet (définition 0.4.2) aux éléments du domaine vectoriel.

Définition 2.2.4 On dit qu'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{D}_B converge en loi de Dirichlet s'il existe une structure d'erreur $\widehat{S} = (B, \mathcal{B}(B), \nu, \widehat{\mathbb{D}}, \widehat{\Gamma})$ telle que :

$$i) (U_n)_* P \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu \text{ en loi i.e } \forall F \in C_b(B, \mathbb{R}), \mathbb{E}_P[F(U_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_B F(x) d\nu(x)$$

$$ii) C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip \subset \widehat{\mathbb{D}} \text{ et } \forall F \in C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip, \mathcal{E}[F(U_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \widehat{\mathcal{E}}[F].$$

Par commodité, nous dirons alors que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers \widehat{S} .

Remarque 5 : La définition précédente peut être étendue à une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans B en supposant, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall F \in$

$C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip$, $F(U_n) \in \mathbb{D}$ (lorsque $U_n \in \mathbb{D}_B$, ceci est une conséquence de la proposition 2.2.2). Ainsi, la notion de convergence en loi de Dirichlet est canonique au sens où elle ne dépend pas du choix d'un opérateur de dérivation et donc du choix d'un domaine vectoriel. La construction et l'utilisation d'un opérateur $\#$ sera pour nous un outil purement technique visant à démontrer des résultats de convergence en loi de Dirichlet. •

Remarque 6 : Lorsque $B = C([0, 1], \mathbb{R})$, la convergence en loi de Dirichlet d'une suite d'éléments de \mathbb{D}_B entraîne la convergence en loi de Dirichlet au sens des marginales fini-dimensionnelles (définition 0.4.3). De plus, la structure \widehat{S} est entièrement déterminée par les lois de Dirichlet marginales. •

Ayant supposé que S vérifie la propriété (G), nous obtenons l'analogie de la proposition 0.4.1 dans un cadre très général.

Proposition 2.2.4 *Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers U dans \mathbb{D}_B alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers U_*S .*

La démonstration utilise le résultat probabiliste suivant :

Lemme 2.2.2 *Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et U des variables aléatoires dans $L^2(P; B)$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

i) *La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers U et $\mathbb{E}_P[\|U_n\|_B^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P[\|U\|_B^2]$.*

ii) *Pour toute fonction $F \in C(B, \mathbb{R})$ vérifiant $\lim_{\|x\|_B \rightarrow \infty} \frac{|F(x)|}{\|x\|_B^2} \leq K$, où K est une constante positive, $\mathbb{E}_P[F(U_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P[F(U)]$.*

Preuve : Il suffit de remarquer que la condition $\mathbb{E}_P[\|U_n\|_B^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P[\|U\|_B^2]$ implique l'uniforme intégrabilité des variables $(\|U_n\|_B^2)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Preuve de la proposition 2.2.4 : Soit $F \in C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip$, d'après la proposition 2.2.2, on a

$$\mathcal{E}[F(U_n)] = \frac{1}{2} \int_W \int_{\widehat{W}} \underbrace{\langle F'(U_n), U_n^\# \rangle^2}_{\Phi(U_n, U_n^\#)} d\widehat{P}dP.$$

Or, la convergence de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers U dans \mathbb{D}_B entraîne la convergence du couple $(U_n, U_n^\#)$ vers le couple $(U, U^\#)$ dans $L^2(P \otimes \widehat{P}; B^2)$. La fonction Φ étant continue et sous quadratique, nous déduisons du lemme précédent que

$$\mathcal{E}[F(U_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_W \int_{\widehat{W}} \langle F'(U), U^\# \rangle^2 d\widehat{P}dP = \mathcal{E}[F(U)]$$

et donc le résultat. □

2.3 Simulation de processus gaussiens

Nous étudions, dans cette partie, la convergence, au sens des formes de Dirichlet, de certaines séries approximantes de processus gaussiens continus.

Soient $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ les applications coordonnées de l'espace de probabilité produit $(W, \mathcal{W}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0, 1))^{\mathbb{N}}$ et $(\mathcal{C} = C_0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ l'espace de Wiener. Notons $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ le mouvement Brownien défini par randomisation d'une base hilbertienne $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^2([0, 1], dx)$:

$$B_t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \chi_k(s) ds g_k.$$

Nous considérons un processus gaussien centré $(Z_t)_{t \in [0, 1]}$, à trajectoires continues, de la forme

$$Z_t = \int_0^t K(t, s) dB_s$$

où $K(\cdot, \cdot)$ est un noyau de carré intégrable sur $[0, 1]^2$. La fonction de covariance $R(\cdot, \cdot)$ de Z est alors de la forme $R(s, t) = \int_0^{t \wedge s} K(t, u) K(s, u) du$. Un résultat classique, dû à Fernique, permet de déduire de la continuité des trajectoires de Z que $\mathbb{E}_P [e^{\lambda \|Z\|_{\infty}^2}] < \infty$ pour $\lambda > 0$ assez petit et donc, en particulier, que

$$\mathbb{E}_P [\|Z\|_{\infty}^2] < \infty. \quad (2.6)$$

Remarque 7 : Une condition suffisante pour la continuité de Z a été proposée par Fernique dans [9] : En notant $p(u) = \sup_{|s-t| \leq u} \mathbb{E}_P [(Z_t - Z_s)^2]^{\frac{1}{2}}$, la condition

$$\int_0^1 \left(\text{Log} \left(\frac{1}{u} \right) \right)^{\frac{1}{2}} dp(u) < \infty \quad (2.7)$$

assure la continuité des trajectoires de Z . Elle permet, de plus, d'obtenir un contrôle assez fin des accroissements du processus Z ([13]).•

Pour $t \in [0, 1]$, nous notons $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n(t) = \sum_{k=0}^n g_k \int_0^t \chi_k(s) ds. \quad (2.8)$$

Nous nous intéressons à la convergence de la suite de processus sur $[0, 1]$ définie par

$$Z_n(t) = \int_0^t K(t, s) dY_n(s) = \sum_{k=0}^n g_k \int_0^t K(t, s) \chi_k(s) ds. \quad (2.9)$$

En vertu de l'inégalité suivante : $\forall h \in L^2([0, 1], dx)$,

$$\left| \int_0^t K(t, u)h(u)du - \int_0^s K(s, u)h(u)du \right| \leq \|Z_t - Z_s\|_{L^2(P)} \|h\|_{L^2([0,1],dx)},$$

nous déduisons, de la continuité des trajectoires de Z et de la relation (2.6), que le processus Z_n est à trajectoires continues.

En utilisant le fait que les g_k sont des variables aléatoires gaussiennes, indépendantes, centrées et réduites, nous avons le résultat probabiliste suivant qui est une conséquence immédiate du théorème de convergence des martingales vectorielles de carré intégrable ([16]).

Proposition 2.3.1 *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite de processus continus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge P presque sûrement dans \mathcal{C} et dans $L^p(P; \mathcal{C})$ vers Z .*

Remarque 8 : Supposons $K = 1$. En prenant pour $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base trigonométrique de $L^2([0, 1], dx)$, nous retrouvons, grâce à la proposition précédente, le résultat démontré par Wiener en 1923 pour sa célèbre construction du mouvement Brownien ([19],[21]).

En choisissant pour $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base de Haar, Ciesielski ([7]) a montré que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est exactement l'approximation polygonale du mouvement Brownien dont Lévy a prouvé la convergence uniforme presque sûre ([15]).•

2.3.1 Première extension

Nous allons supposer ici que les g_k sont erronées en conservant les hypothèses d'indépendance et d'équi-distribution pour les g_k et en les supposant pour leurs erreurs. On suppose, de plus, que l'erreur sur g_k est modélisée par la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} : $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m = \mathcal{N}(0, 1), H^1(m), u \mapsto u'^2)$. Autrement dit, les g_k sont les applications coordonnées de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m = \mathcal{N}(0, 1), H^1(m), u \mapsto u'^2)^{\mathbb{N}}.$$

La structure S est classiquement équipée de l'opérateur de dérivation $\#$ qui est un gradient particulier construit avec une copie $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$ de (W, \mathcal{W}, P) . En notant \widehat{g}_k les applications coordonnées de \widehat{W} , nous avons, pour $U = F(g_1, \dots, g_n, \dots) \in \mathbb{D}$,

$$U^\# = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial g_i}(g_1, \dots, g_n, \dots) \widehat{g}_i.$$

Il est alors facile de voir que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ et que

$$Z_n^\#(t) = \int_0^t K(t, s) dY_n^\#(s) = \sum_{k=0}^n \widehat{g}_k \int_0^t K(t, s) \chi_k(s) ds. \quad (2.10)$$

De même, $Z \in \mathbb{D}_C$ et

$$Z_t^\# = \int_0^t K(t, s) dB_s^\#.$$

Ainsi, nous déduisons aisément de la proposition 2.3.1 que le couple $(Z_n, Z_n^\#)$ converge vers le couple $(Z, Z^\#)$ dans $L^2(P \otimes \widehat{P}; \mathcal{C}^2)$. Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 2.3.2 *La suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Z dans \mathbb{D}_C .*

Corollaire 2.3.1 *D'après la proposition 2.2.4 et le résultat précédent, la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers Z_*S .*

Remarque 9 : Lorsque $K = 1$, $Z_*S = S_{OU}$. De plus, considérer la structure d'erreur Z_*S est une manière simple d'aborder le calcul de Malliavin associé au processus gaussien Z ([1]) et, dans le cas où Z est suffisamment régulier, de construire par dualité un calcul stochastique dans l'esprit du calcul d'Itô. •

Nous pouvons associer, de manière usuelle ([2], p.52), une capacité à la structure d'erreur S . En utilisant le théorème 1.3.2, [2], p.268, on a le raffinement suivant de la proposition 2.3.1 :

Proposition 2.3.3 *Il existe des représentants quasi-continus des Z_n (resp. de Z) notés \widetilde{Z}_n (resp. \widetilde{Z}) tels que la suite $(\widetilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément quasi-partout vers \widetilde{Z} .*

D'après la proposition 2.2.2, nous savons que les variables aléatoires $N_n = \sup_{s \in [0,1]} Z_n(s)$ (resp. $N = \sup_{s \in [0,1]} Z(s)$) et $M_n = \|Z_n\|_\infty$ (resp. $M = \|Z\|_\infty$) appartiennent à \mathbb{D} . Nous allons étudier, pour clore ce paragraphe, la convergence en loi de Dirichlet de la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (un raisonnement analogue pouvant être effectué pour l'étude de $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Notons que les résultats obtenus ne peuvent se déduire directement de la convergence en loi de Dirichlet de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ car cette notion de convergence n'est, *a priori*, stable que pour les fonctions de classe $C^1 \cap Lip$. Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 2.3.4 *Supposons que pour P presque tout ω , il existe un unique point $T(\omega)$ où la fonction $t \in [0, 1] \mapsto Z_t(\omega)$ atteint son maximum (c'est le cas notamment lorsque Z est le mouvement Brownien). Alors, la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers N dans \mathbb{D} (ceci implique la convergence en loi de Dirichlet de $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers N_*S).*

Preuve : La convergence de $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers N dans $L^2(P)$ est une conséquence immédiate de la proposition 2.3.1. En utilisant un résultat de Nualart et Vives ([17], théorème 1) on obtient $N_n^\# = Z_n^\#(T_n)$, où $T_n = \inf\{t \in [0, 1]; Z_n(t) = N_n\}$, et $N^\# = Z^\#(T)$.

Comme les trajectoires du processus Z sont supposées atteindre leur maximum en un unique point T , il est facile de déduire, de la convergence uniforme presque sûre de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers Z , la convergence presque sûre de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers T . Ceci entraîne la convergence presque sûre de $(N_n^\#)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $N^\#$ car la suite $(Z_n^\#)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément presque sûrement vers $Z^\#$. Enfin, nous obtenons la convergence de $(N_n^\#)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $N^\#$ dans $L^2(P \otimes \hat{P})$ par convergence dominée et donc la conclusion. \square

2.3.2 Interprétation en termes de simulation

Nous désirons simuler un processus gaussien à trajectoires continues à l'aide d'une approximation de la forme (2.9).

Remarque 10 : Dans le cas où $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la base trigonométrique de l'espace $L^2([0, 1], dx)$, nous retrouvons la célèbre méthode de Karhunen-Loève qui est bien adaptée à la simulation des processus gaussiens. Cette méthode possède notamment l'avantage de générer entièrement la trajectoire du processus contrairement à des méthodes de type Cholesky ou point médian où les trajectoires ne sont calculées qu'en un nombre fini de points. \bullet

Il suffit donc de générer une famille $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Nous pouvons utiliser pour cela la méthode d'inversion (même si on ne connaît pas explicitement l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale, on peut trouver dans [22] des approximations qui rendent cette technique utilisable). Nous simulons, alors, une famille $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$, en utilisant, par exemple, un générateur de nombres pseudo-aléatoires. Les phénomènes de troncature informatique entraînent inévitablement une erreur sur les U_k que l'on modélise par une structure d'erreur $s = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), dx, dl, \gamma)$. Si nous supposons les erreurs indépendantes (bien que les lois uniformes soient générées avec le même outil informatique), nous pouvons considérer que les U_k sont les applications coordonnées de la structure produit $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = s^{\mathbb{N}}$.

Il est alors naturel de s'intéresser à la convergence, au sens des formes de Dirichlet, de la série

$$Z_n(t) = \sum_{k=0}^n \underbrace{F^{-1}(U_k)}_{g_k} \int_0^t K(t, s) \chi_k(s) ds, \quad (2.11)$$

où F est la fonction de répartition d'une gaussienne centrée et réduite.

Supposons que s soit la structure d'erreur pseudo-gaussienne sur $[0, 1]$ (exemple 4 de l'introduction). On peut voir aisément que, dans ce cas, les variables $g_k = F^{-1}(U_k)$ sont les applications coordonnées de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'étude de la série (2.11) a donc été effectuée au paragraphe précédent (proposition 2.3.2).

Nous allons voir maintenant que ce résultat perdure lorsque s est choisie parmi une large famille de structures d'erreur sur $[0, 1]$.

2.3.3 Deuxième extension

Soit a une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}_+ . Nous considérons la pré-structure d'erreur suivante :

$$([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), dx, C^1([0, 1]), \gamma[f](x) = a(x)f'(x))$$

dont nous supposons la fermabilité (ceci impose des conditions sur la fonction a en relation avec le théorème de Hamza ([12], p.105)). Nous notons alors $s = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), dx, dl, \gamma)$ sa plus petite extension fermée et ϵ la forme de Dirichlet associée (si nous prenons $a(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-(F^{-1}(x))^2}$, où F est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, on retrouve la structure pseudo-gaussienne sur $[0, 1]$). La structure s possède alors un opérateur gradient $\nabla : dl \rightarrow L^2([0, 1], dx)$ qui vérifie $\forall f \in C^1([0, 1]), \nabla[f] = \sqrt{a}f'$.

Supposons, de plus, que

$$\int_0^1 \frac{a}{(F'(F^{-1}))^2} dx = c < \infty,$$

avec $c = 1$ pour simplifier les notations. En approximant F^{-1} par des fonctions dans $C^1([0, 1])$ bien choisies, nous déduisons facilement de la fermeture de ϵ que $F^{-1} \in dl$ et que $\gamma[F^{-1}] = \frac{a}{(F'(F^{-1}))^2}$.

Nous pouvons alors définir un opérateur de dérivation $\#$ pour la structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = s^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante : En notant $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$ une copie de (W, \mathcal{W}, P) et $(\widehat{U}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ les applications coordonnées associées, l'opérateur défini, $\forall G \in \mathbb{D}$, par

$$G^\# = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial U_k} \sqrt{a(U_k)} F^{-1}(\widehat{U}_k) \quad (2.12)$$

est un opérateur de dérivation et nous notons $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ le domaine vectoriel correspondant (\mathcal{C} étant l'espace de Wiener). Il est alors facile de voir que, $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ avec

$$Z_n^\#(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{a(U_k)}}{F'(F^{-1}(U_k))} F^{-1}(\widehat{U}_k) \int_0^t K(t, s) \chi_k(s) ds. \quad (2.13)$$

Lorsque s est la structure d'erreur pseudo-gaussienne sur $[0, 1]$, on retrouve l'expression (2.10). Dans ce cas très particulier, la convergence de $Z_n^\#$ dans $L^2(P \otimes \widehat{P}; \mathcal{C})$ est une simple conséquence de la proposition 2.3.1 car Z_n et $Z_n^\#$ ont la même forme. Dans le cas général, nous avons toujours, par la proposition 2.3.1, la convergence de Z_n dans $L^2(P, \mathcal{C})$, cependant, l'étude de $Z_n^\#$ doit être abordée d'une manière différente car les variables aléatoires $\frac{\sqrt{a(U_k)}}{F'(F^{-1}(U_k))} F^{-1}(\widehat{U}_k)$ ne sont pas, *a priori*, gaussiennes.

Nous allons, pour cela, utiliser un argument de symétrisation. Considérons une copie $(\widetilde{W}, \widetilde{\mathcal{W}}, \widetilde{P})$ de (W, \mathcal{W}, P) indépendante de $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$ et notons $(\widetilde{U}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ les applications coordonnées associées. Nous définissons l'opérateur $\widetilde{\#}$ de la manière suivante : $\forall G \in \mathbb{D}$,

$$G^{\widetilde{\#}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial U_k} \sqrt{a(U_k)} \frac{F^{-1}(\widehat{U}_k) - F^{-1}(\widetilde{U}_k)}{\sqrt{2}}. \quad (2.14)$$

L'opérateur $\widetilde{\#}$ n'est pas un opérateur de dérivation au sens de la définition 2.1.2 mais est un gradient car nous avons la relation suivante :

$$\mathbb{E}_{\widehat{P} \otimes \widetilde{P}}[(G^{\widetilde{\#}})^2] = \Gamma[G].$$

Il est alors possible, par une procédure analogue à la définition 2.2.1, d'étendre cet opérateur pour certaines variables aléatoires à valeurs dans \mathcal{C} . Nous notons alors $\widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{C}}$ le domaine vectoriel associé que nous équipons de la norme $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{C}}}$ définie, $\forall G \in \widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{C}}$, par

$$\|G\|_{\widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{C}}} = \left(\|G\|_{L^2(P; \mathcal{C})}^2 + \frac{1}{2} \|G^{\widetilde{\#}}\|_{L^2(P \otimes \widehat{P} \otimes \widetilde{P}; \mathcal{C})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, $Z_n \in \widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{C}}$ avec

$$Z_n^{\widetilde{\#}}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{a(U_k)}}{F'(F^{-1}(U_k))} \frac{F^{-1}(\widehat{U}_k) - F^{-1}(\widetilde{U}_k)}{\sqrt{2}} \int_0^t K(t, s) \chi_k(s) ds,$$

de même, $Z \in \widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{C}}$ avec

$$Z^{\widetilde{\#}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{a(U_k)}}{F'(F^{-1}(U_k))} \frac{F^{-1}(\widehat{U}_k) - F^{-1}(\widetilde{U}_k)}{\sqrt{2}} \int_0^t K(t, s) \chi_k(s) ds.$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 2.3.5 *La suite de processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{C}}$ vers Z .*

Avant de démontrer cette proposition, faisons quelques rappels concernant les suites symétriques de variables aléatoires.

Définition 2.3.1 Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach est dite symétrique si pour tout choix de signes \pm , $\forall N \in \mathbb{N}^*$, le vecteur $(\pm X_1, \dots, \pm X_N)$ a même loi que (X_1, \dots, X_N) (c'est notamment le cas lorsque les X_n sont indépendantes et symétriques).

Le théorème suivant est une conséquence importante de l'inégalité de Lévy ([14], p.48).

Théorème 2.3.1 (Lévy, Itô, Nisio) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite symétrique de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach séparable B . Pour tout n , on note μ_n la loi de la n -ième somme partielle $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Les quatre propositions suivantes sont alors équivalentes :

- i) $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement ;
- ii) $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité ;
- iii) $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi dans B ;
- iv) il existe une probabilité μ sur B telle que $(f_*\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi dans \mathbb{R} vers $(f_*\mu)$ pour tout $f \in B'$.

Preuve de la proposition 2.3.5 : Notons $Q = P \otimes \hat{P} \otimes \tilde{P}$. La convergence de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers Z dans $L^2(P; \mathcal{C})$ est une conséquence de la proposition 2.3.1. Nous déduisons facilement de la relation

$$\mathbb{E}_Q \left[\left| Z_n^{\tilde{\#}}(t) - Z^{\tilde{\#}}(t) \right|^2 \right] \leq \sum_{n+1}^{\infty} \left(\int_0^t K(t, s) \chi_k(s) ds \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

que la suite $(Z_n^{\tilde{\#}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens des marginales fini-dimensionnelles vers $Z^{\tilde{\#}}$. Les variables $\frac{\sqrt{a(U_k)}}{F'(F^{-1}(U_k))} \frac{F^{-1}(\tilde{U}_k) - F^{-1}(\tilde{U}_k)}{\sqrt{2}}$ étant indépendantes et symétriques, il résulte du théorème 2.3.1 que la suite $(Z_n^{\tilde{\#}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $Z^{\tilde{\#}}$.

D'après l'inégalité de Lévy ([14], p.47), nous avons, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$Q \left(\max_{k \leq N} \|Z_k^{\tilde{\#}}\|_{\infty} > t \right) \leq 2Q \left(\|Z_N^{\tilde{\#}}\|_{\infty} > t \right).$$

Or, la suite $(Z_n^{\tilde{\#}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $Z^{\tilde{\#}}$, ainsi,

$$Q \left(\max_{k \in \mathbb{N}} \|Z_k^{\tilde{\#}}\|_{\infty} > t \right) \leq 2Q \left(\|Z^{\tilde{\#}}\|_{\infty} > t \right).$$

Nous obtenons, en appliquant le théorème de Fubini et en utilisant le fait que $Z^{\tilde{\#}}$ est un processus gaussien continu (donc de carré intégrable), que

$$\mathbb{E}_Q \left[\max_{k \in \mathbb{N}} \|Z_k^{\tilde{\#}}\|_{\infty}^2 \right] \leq 2\mathbb{E}_Q[\|Z^{\tilde{\#}}\|_{\infty}^2] < \infty.$$

La conclusion est une simple conséquence du théorème de convergence dominée. \square

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.2 *La suite (Z_n) converge en loi de Dirichlet vers Z_*S .*

Preuve : En adaptant la preuve de la proposition 2.2.2, nous pouvons voir que l'opérateur $\tilde{\#}$ vérifie le calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$ généralisé : Si $G \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$, $G(Z_n) \in \mathbb{D}$ et $G(Z_n)^{\tilde{\#}} = \langle G'(Z_n), Z_n^{\tilde{\#}} \rangle$. Il suffit alors de reprendre la preuve de la proposition 2.2.4. \square

Remarque 11 : Des résultats analogues peuvent être obtenus en considérant que les variables aléatoires gaussiennes sont simulées non pas par la méthode d'inversion mais par la méthode de Box-Muller. \bullet

Remarque 12 : Les résultats de convergence en loi de Dirichlet démontrés dans cette partie ont été obtenus comme corollaires de résultats de convergence de type L^2 pour les variables aléatoires et leurs dérivées. Ceci provient du fait que les approximations de processus gaussiens considérées convergent en un sens fort. Un raisonnement analogue ne pourra être mis en place dans le chapitre 4 car l'approximation de Donsker converge en loi vers le mouvement Brownien et non dans L^2 . Des arguments plus fins seront utilisés. \bullet

Bibliographie

- [1] E. Alòs, O. Mazet and D. Nualart, Stochastic calculus with respect to Gaussian processes, *Ann. Probab.* **29** (2001), no. 2, 766–801.
- [2] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter, Berlin, 1991.
- [3] N. Bouleau, Calcul d'erreur complet lipschitzien et formes de Dirichlet, *J. Math. Pures Appl. (9)* **80** (2001), no. 9, 961–976.
- [4] N. Bouleau, *Error calculus for finance and physics : the language of Dirichlet forms*, de Gruyter, Berlin, 2003.
- [5] N. Bouleau, Théorème de Donsker et formes de Dirichlet, *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), no. 5, 369–380.
- [6] N. Bouleau, Differential calculus for Dirichlet forms : the measure-valued gradient preserved by image, *J. Funct. Anal.* **225** (2005), no. 1, 63–73.
- [7] Z. Ciesielski, Hölder conditions for realizations of Gaussian processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **99** (1961), 403–413.
- [8] L. Denis, *Analyse quasi-sûre de certaines propriétés classiques sur l'espace de Wiener*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, 1994.
- [9] X. Fernique, Continuité des processus Gaussiens, *C. R. Acad. Sci. Paris* **258** (1964), 6058–6060.
- [10] D. Feyel and A. de La Pradelle, Espaces de Sobolev Gaussiens, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **39** (1989), no. 4, 875–908.
- [11] D. Feyel and A. de La Pradelle, Capacités gaussiennes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **41** (1991), no. 1, 49–76.
- [12] M. Fukushima, Y. Ōshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter, Berlin, 1994.
- [13] A. M. Garsia, E. Rodemich and H. Rumsey, Jr., A real variable lemma and the continuity of paths of some Gaussian processes, *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1970/1971), 565–578.
- [14] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Springer, Berlin, 1991.

- [15] P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Suivi d'une note de M. Loeve. Deuxieme edition revue et augmentee, Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1965.
- [16] J. Neveu, *Discrete-parameter martingales*, Translated from the French by T. P. Speed., Revised edition, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [17] D. Nualart and J. Vives, Continuité absolue de la loi du maximum d'un processus continu, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307** (1988), no. 7, 349–354.
- [18] D. Nualart, *The Malliavin calculus and related topics*, Springer, New York, 1995.
- [19] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Reprint of the 1934 original, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [20] S. Watanabe, *On stochastic differential equations and Malliavin calculus*, Tata Institute of Fundamental Research, Vol. 73, Springer-Verlag, 1979.
- [21] N. Wiener, Differential space, J. Math. Phys. **2** (1923), 131-174.
- [22] M.J. Wichura, *The percentage points of the normal distribution*, Appl. Statist. 37, Algorithm AS 241, 1988.

Chapitre 3

Extension du théorème de la limite centrale hilbertien

Le but de ce chapitre est de proposer une extension du théorème 0.4.3 pour des variables aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert séparable. Nous considérons pour cela une structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ qui possède un gradient (définition 2.1.1), de manière à pouvoir définir le domaine vectoriel associé à un espace de Hilbert séparable H . Nous avons vu dans le chapitre 2 que cette hypothèse est peu restrictive et permet de donner une définition de la \mathbb{D} -loi d'un élément $U \in \mathbb{D}_H$ indépendante du choix d'une base hilbertienne (chap.2, remarque 2). Nous considérons, alors, une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires dans \mathbb{D}_H , Dirichlet indépendantes (définition 2.2.3) et de même \mathbb{D} -loi (définition 2.2.2) et nous étudions la convergence en loi de Dirichlet (définition 2.2.4) de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \frac{U_1 + \dots + U_n}{\sqrt{n}}$.

Plan du chapitre 3 : Dans la partie 1, nous énonçons le résultat très naturel que nous avons obtenu : la structure d'erreur limite est une structure de type Ornstein-Uhlenbeck. De la même manière que l'utilisation de mesures gaussiennes en statistiques est, en partie, justifiée par le théorème de la limite centrale probabiliste, ce résultat met en lumière l'importance d'une famille de structures d'erreur pour les applications. La partie 2 est consacrée à la démonstration du théorème principal. Nous montrons que l'hypothèse de Dirichlet indépendance sur les U_n permet de se ramener au cas où ces variables sont définies sur une structure produit et qu'alors, les couples $(U_n, U_n^\#)$ sont indépendants et de même loi. L'étude de la convergence de la suite $(\mathcal{E}[F(V_n)])_{n \in \mathbb{N}^*}$, lorsque $F \in C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip$, est alors une simple conséquence du théorème de la limite centrale probabiliste dans les espaces de Hilbert (en effet, dans le cas hilbertien, la relation intrinsèque entre indépendance et orthogonalité permet d'étendre aisément la convergence en loi du couple $(V_n, V_n^\#)$ aux fonctionnelles continues sous quadratiques). Le point délicat reste l'existence de la structure limite qui se ramène au problème de la

fermabilité d'un opérateur gradient directionnel au sens de [3]. Cette fermabilité est obtenue en généralisant l'argument d'intégration par parties utilisé dans la preuve du théorème 0.4.3. Enfin, le résultat est interprété, dans la partie 3, comme limite projective (définition 0.3.7) de l'étude en dimension finie.

3.1 Résultat principal

Supposons que la structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ possède un gradient $\nabla : \mathbb{D} \rightarrow L^2(m; \mathcal{H})$ (définition 2.1.1). Nous notons $\# : \mathbb{D} \rightarrow L^2(m \otimes \widehat{m})$ un opérateur de dérivation associé (définition 2.1.2). Bien qu'il ne soit pas canonique, le choix de l'isométrie J n'est pas spécifié car, lorsque H est un espace de Hilbert séparable, la définition de \mathbb{D}_H (définition 2.2.1) est indépendante d'un tel choix (chap.2, remarque 2).

Nous obtenons, alors, l'extension suivante du théorème de la limite centrale hilbertien :

Théorème 3.1.1 *Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires centrées de \mathbb{D}_H , Dirichlet indépendantes et de même \mathbb{D} -loi. En notant Σ l'opérateur de covariance de U_1 , alors, la suite $V_n = \frac{U_1 + \dots + U_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi de Dirichlet vers $\widehat{S} = (H, \mathcal{B}(H), \nu, \widehat{\mathbb{D}}, \widehat{\Gamma})$ où*

- i) ν est une mesure gaussienne sur H , centrée, d'opérateur de covariance Σ ,*
- ii) $\forall F \in C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip, F \in \widehat{\mathbb{D}}$ et*

$$\widehat{\mathcal{E}}[F] = \frac{1}{2} \int_{H^2} \langle F'(x), y \rangle^2 d\mu(x, y) \quad (3.1)$$

où μ est une mesure gaussienne sur H^2 , centrée, d'opérateur de covariance K défini pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans H^2 par

$$\langle Kx, y \rangle_{H^2} = \langle \Sigma x_1, y_1 \rangle + 2\mathcal{E}[\langle U_1, x_2 \rangle, \langle U_1, y_2 \rangle],$$

iii) la forme $(C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip, \widehat{\mathcal{E}})$ est fermable, sa plus petite extension fermée est notée $(\widehat{\mathbb{D}}, \widehat{\mathcal{E}})$ et admet un opérateur carré du champ $\widehat{\Gamma}$.

Ainsi, la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi de Dirichlet vers une structure d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck (définition 0.3.6) car nous avons pour toute fonction cylindrique $F = f(\langle x_1, \cdot \rangle, \dots, \langle x_p, \cdot \rangle)$ de classe $C^1 \cap Lip$,

$$\widehat{\Gamma}[F] = 2 \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (\langle x_1, \cdot \rangle, \dots, \langle x_p, \cdot \rangle) \mathcal{E}[\langle U_1, x_i \rangle, \langle U_1, x_j \rangle].$$

Remarque 1 : L'opérateur K est bien un opérateur de covariance, il appartient à la famille des opérateurs trace sur H^2 . En effet, comme Σ est un opérateur de covariance et comme $U_1 \in \mathbb{D}_H$, d'après la proposition 2.2.1, nous avons

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle Kh_k, h_k \rangle_{H^2} < \infty$$

lorsque $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H^2 . •

3.2 Preuve du théorème 3.1.1

Nous allons montrer, dans un premier temps, que l'hypothèse de Dirichlet indépendance nous permet de considérer que les variables aléatoires U_i sont de la forme $U_i \circ g_i$ où les $(g_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont les applications coordonnées d'un produit de structures d'erreur.

Nous définissons $s = (\Omega, \mathcal{A}, P, dl, \gamma) = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)^{\mathbb{N}^*}$ et $e[., .] = \frac{1}{2} \mathbb{E}_P[\gamma[., .]]$ la forme de Dirichlet associée. En introduisant l'ensemble suivant,

$$\ell^2(\mathcal{H}) = \left\{ (h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}; \forall i \in \mathbb{N}^*, h_i \in \mathcal{H} \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} \|h_i\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty \right\},$$

nous pouvons construire un opérateur gradient $\tilde{\nabla}$ pour s :

$$\tilde{\nabla} : F \in dl \mapsto (\dots, \nabla_{[i]}[F], \dots) \in L^2(P; \ell^2(\mathcal{H}))$$

où le symbole $\nabla_{[i]}$ signifie que l'opérateur ∇ agit sur la i -ème composante de F . De la même manière, si $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ est une copie de l'espace (Ω, \mathcal{A}, P) , nous obtenons un opérateur de dérivation associé à s et noté $'$ en posant, $\forall F \in dl$,

$$F'(\omega, \hat{\omega}) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} J[\nabla_{[i]}[F](\omega)](\hat{\omega}_i) \in L^2(P \otimes \hat{P}). \quad (3.2)$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, nous définissons $X_i : \omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in \Omega \mapsto U_i(\omega_i)$. Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 a) $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \in dl_H$ et $(X_i)'(\omega, \hat{\omega}) = U_i^\#(\omega_i, \hat{\omega}_i)$.
b) Les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont Dirichlet indépendantes et de même loi de Dirichlet.

Preuve : Le a) est une simple conséquence de la définition (3.2). Comme les couples (X_i, X_i') sont indépendants et de même loi, le b) s'obtient en utilisant la proposition 2.2.3. □

En posant $Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$, nous pouvons énoncer le résultat suivant qui sera utilisé par la suite.

Lemme 3.2.2 $\forall F \in C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip$, nous avons $\mathcal{E}[F(V_n)] = e[F(Z_n)]$.

Preuve : Supposons, dans un premier temps, que F soit une fonction cylindrique de classe $C^1 \cap Lip$. Pour simplifier les notations, nous considérons le cas où $F = f(\langle x, \cdot \rangle)$ avec $x \in H$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap Lip$. En utilisant le calcul fonctionnel, on obtient

$$e[F(Z_n)] = \frac{1}{2n} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n f'^2(\langle Z_n, x \rangle) \gamma[\langle x, X_i \rangle, \langle x, X_j \rangle] dP.$$

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*$, X_k est Dirichlet indépendante de $(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n)$. Ainsi, d'après la proposition 2.2.3,

$$e[F(Z_n)] = \frac{1}{2n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n f'^2(\langle Z_n, x \rangle) \mathbb{E}_P[\gamma[\langle x, X_i \rangle] \mid X_i] dP.$$

Comme les n -uplets (X_1, \dots, X_n) et (U_1, \dots, U_n) ont même loi et comme

$$\gamma[\langle x, X_i \rangle](\omega) = \Gamma[\langle x, U_i \rangle](\omega_i),$$

la conclusion est immédiate.

Pour le cas général, soient $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H et P_n la projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par (e_0, \dots, e_n) . Comme $Z_n \in dl_H$ et $V_n \in \mathbb{D}_H$, en utilisant un argument similaire à celui utilisé dans la preuve de la proposition 2.2.2, on obtient que $\forall F \in C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$e[F \circ P_k(Z_n)] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e[F(Z_n)] \quad \text{et} \quad \mathcal{E}[F \circ P_k(V_n)] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}[F(V_n)].$$

Les $F \circ P_k$ étant des fonctions cylindriques de classe $C^1 \cap Lip$, le résultat en découle par unicité des limites. \square

Nous pouvons alors revenir à la preuve du résultat principal de ce chapitre.

Preuve du théorème 3.1.1 : La convergence en loi de la suite $((V_n)_* m)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers ν est une conséquence du théorème de la limite centrale pour les variables aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert ([6]).

Nous allons démontrer que, $\forall F \in C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$\mathcal{E}[F(V_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathcal{E}}[F].$$

Pour ce faire, nous étudions, en vertu du lemme 3.2.2, le comportement asymptotique de $e[F(Z_n)]$. Comme $Z_n \in dl_H$, nous avons, d'après le calcul fonctionnel généralisé (proposition 2.2.2),

$$2e [F(Z_n)] = \int_{\Omega} \int_{\widehat{\Omega}} \langle F'(Z_n), Z'_n \rangle^2 dP d\widehat{P}.$$

Les variables aléatoires (X_i, X'_i) étant i.i.d, centrées et de carré intégrable, le théorème de la limite centrale hilbertien assure la convergence en loi dans H^2 de (Z_n, Z'_n) vers une mesure gaussienne μ , centrée, d'opérateur de covariance K vérifiant pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans H^2 ,

$$\begin{aligned} \langle Kx, y \rangle_{H^2} &= \mathbb{E}_m[\langle U_1, x_1 \rangle \langle U_1, y_1 \rangle] + \mathbb{E}_{m \otimes \widehat{m}}[\langle U_1^\#, x_2 \rangle \langle U_1^\#, y_2 \rangle] \\ &= \langle \Sigma x_1, y_1 \rangle + 2\mathcal{E}[\langle U_1, x_2 \rangle, \langle U_1, y_2 \rangle]. \end{aligned}$$

De plus, l'indépendance des variables (X_i, X'_i) entraîne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P \mathbb{E}_{\widehat{P}}[\|Z_n\|_H^2 + \|Z'_n\|_H^2] &= \mathbb{E}_m[\|U_1\|_H^2] + \mathbb{E}_m \mathbb{E}_{\widehat{m}}[\|U_1^\#\|_H^2] \\ &= \int_{H^2} \|x\|_{H^2}^2 d\mu(x), \end{aligned}$$

ainsi, les variables $\|(Z_n, Z'_n)\|_{H^2}^2$ sont équi-intégrables (lemme 2.2.2).

Comme la fonction $\phi : (x, y) \in H^2 \mapsto \langle F'(x), y \rangle^2$ est continue et satisfait $\phi(x, y) \leq c \|(x, y)\|_{H^2}^2$, où c est une constante, on obtient

$$2\mathcal{E}[F(V_n)] \rightarrow \int_{H^2} \langle F'(x), y \rangle^2 d\mu(x, y).$$

Pour conclure, il nous reste à démontrer la fermabilité de la forme $\widehat{\mathcal{E}}$ définie sur $C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip$ par (3.1). La preuve est fondée sur trois lemmes dont les démonstrations sont laissées en appendice.

Lemme 3.2.3 *Soit β une base orthonormée de H . La forme $(C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip, \widehat{\mathcal{E}})$ est fermable si et seulement si la forme $(\mathcal{A}_\beta, \widehat{\mathcal{E}})$ est fermable où*

$$\mathcal{A}_\beta = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{f(\langle e_1, \cdot \rangle, \dots, \langle e_p, \cdot \rangle); (e_1, \dots, e_p) \in \beta^p, f \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip\}.$$

De plus, lorsque l'une des assertions est vérifiée, leurs plus petites extensions fermées coïncident.

Comme Σ est un opérateur de covariance, il est positif et appartient à la classe des opérateurs trace. Ainsi ([5]), il existe une base orthonormée de H , notée $\beta_0 = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, constituée de vecteurs propres de Σ . D'après le lemme précédent, il nous suffit de démontrer la fermabilité de la forme $(\mathcal{A}_{\beta_0}, \widehat{\mathcal{E}})$. Si on note $(\sigma_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$ les valeurs propres correspondantes, $(\langle e_i, \cdot \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$ est, sous ν , une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, centrées, de variances $(\sigma_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$.

Comme $U_1 \in \mathbb{D}_H$, nous déduisons de la proposition 2.2.2 que l'opérateur bilinéaire

$$T : \left(\begin{array}{c} H^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \mathcal{E}[\langle x, U_1 \rangle, \langle y, U_1 \rangle] \end{array} \right)$$

est continu car

$$2\mathcal{E}[\langle x, U_1 \rangle, \langle y, U_1 \rangle] \leq \|x\| \|y\| \mathbb{E}_{\hat{m} \otimes m}[\|U_1^\# \|^2].$$

Ainsi, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un opérateur borné $C : H \rightarrow H$ tel que $T(x, y) = \langle Cx, y \rangle$. L'opérateur C étant clairement auto-adjoint et positif, on peut donc définir l'opérateur

$$D_C = C^{\frac{1}{2}} D : \mathcal{A}_{\beta_0} \rightarrow L^2(\nu; H)$$

où D est l'opérateur de dérivation au sens de Fréchet sur H . Nous avons, alors, l'égalité suivante : $\forall F \in \mathcal{A}_{\beta_0}$,

$$\widehat{\mathcal{E}}[F] = \int_H \|D_C[F]\|^2 d\nu.$$

La fermabilité de la forme $(\mathcal{A}_{\beta_0}, \widehat{\mathcal{E}})$ est alors équivalente à la fermabilité de l'opérateur D_C dans $L^2(\nu; H)$.

Nous avons donc reformulé notre problème en termes de gradient directionnel au sens de Goldys et *al* dans [3].

D'après le lemme suivant, nous pouvons imposer, sans pertes de généralités, que, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\sigma_i^2 > 0$.

Lemme 3.2.4 *Lorsque l'on étudie la fermabilité de $(\mathcal{A}_{\beta_0}, \widehat{\mathcal{E}})$ nous pouvons supposer Σ injective.*

Par conséquent, l'opérateur $V = C^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}}$ est bien défini sur $\text{dom}(V) = \Sigma^{\frac{1}{2}}(H)$ et nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.2.5 $(\mathcal{A}_{\beta_0}, D_C)$ fermable $\Leftrightarrow (\text{dom}(V), V)$ fermable.

Montrons, alors, la fermabilité de V : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\Sigma^{\frac{1}{2}}(H)$ vérifiant $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $Vx_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note h_n l'unique vecteur de H tel que $x_n = \Sigma^{\frac{1}{2}}(h_n)$. Ainsi, nous avons $\int_W \langle h_n, U_1 \rangle^2 dm \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $\mathcal{E}[\langle h_n - h_m, U_1 \rangle] \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0$.

Comme S est une structure d'erreur, nous déduisons de la fermeture de la forme \mathcal{E} que $\mathcal{E}(\langle h_n, U_1 \rangle) = \|Vx_n\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et donc que $u = 0$.

Le théorème est alors démontré, la forme $(C^1(H, \mathbb{R}) \cap \text{Lip}, \widehat{\mathcal{E}})$ est fermable et sa plus petite extension fermée possède un carré du champ $\widehat{\Gamma} = 2 \|D_C\|^2$. \square

Corollaire 3.2.1 *Lorsque B est un espace de Banach séparable isomorphe à H , la conclusion du théorème 3.1.1 reste valide : si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires centrées de \mathbb{D}_B , Dirichlet indépendantes et de même \mathbb{D} -loi, la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi de Dirichlet vers une structure d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck parfaitement caractérisée.*

Preuve : Notons Φ l'isomorphisme entre B et H . D'après [1], p.267, la suite $(\Phi(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires centrées de \mathbb{D}_H . Il est facile de voir que ces variables ont même \mathbb{D} -loi et sont, en utilisant la proposition 2.2.3, Dirichlet indépendantes. Ainsi, $\frac{\Phi(U_1) + \dots + \Phi(U_n)}{\sqrt{n}}$ converge en loi de Dirichlet, en vertu du théorème 3.1.1, vers une structure d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck notée \tilde{S} . Il est alors immédiat que V_n converge en loi de Dirichlet vers $(\Phi^{-1})_* \tilde{S}$ qui est également une structure de type Ornstein-Uhlenbeck car Φ^{-1} est linéaire. \square

3.3 Conclusion et remarques

Nous utilisons ici les notations de la section précédente. Considérons Λ l'ensemble des sous ensembles finis de \mathbb{N} . Si $u = \{i_1, \dots, i_n\} \in \Lambda$, on note π_u la projection orthogonale de H sur $\text{vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ et ϕ_u l'homéomorphisme canonique entre \mathbb{R}^n et $\text{vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$. Nous définissons la structure d'erreur suivante :

$$\widehat{S}_u = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}(0, \sigma_{i_1}^2) \otimes \dots \otimes \mathcal{N}(0, \sigma_{i_n}^2), \widehat{\mathbb{D}}_u, \widehat{\Gamma}_u)$$

avec, $\forall f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$\widehat{\Gamma}_u[f] = 2 \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l} \mathcal{E}[\langle e_{i_k}, U_1 \rangle, \langle e_{i_l}, U_1 \rangle]$$

et où $\widehat{\mathbb{D}}_u$ est le domaine de la plus petite extension fermée de $(C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip, \widehat{\mathcal{E}}_u)$ (exemple 3 de l'introduction).

On peut voir facilement que $((\phi_u)_* \widehat{S}_u)_{u \in \Lambda}$ est un système projectif au sens de la définition 0.3.7. Comme $(\pi_u)_* \widehat{S} = (\phi_u)_* \widehat{S}_u$, ce système projectif possède une limite qui n'est autre que \widehat{S} . Ainsi, le théorème 3.1.1 peut être vu comme la limite projective du théorème 0.4.3.

Nous savons que la validité du théorème de la limite centrale dans les Banach séparables est liée à la géométrie de l'espace. Une question naturelle est alors de savoir si le théorème 3.1.1 peut s'étendre à un cadre plus général. Malheureusement, les conditions classiques, dans les espaces de Banach ayant un type et un cotype finis ([6]) ou sur l'espace de Wiener ([4]), semblent, pour l'instant, insuffisantes pour pallier le manque d'orthogonalité qui est la pierre angulaire

de la démonstration précédente. Cependant, en utilisant un célèbre résultat dû à Kwapien ([6]) et le corollaire 3.2.1, nous pouvons voir facilement que le théorème 3.1.1 s'étend aux espaces de Banach de type 2 et de cotype 2.

Appendice : Lemmata

Preuve du lemme 3.2.3

La condition suffisante est triviale car $\mathcal{A}_\beta \subset C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip$. Pour la réciproque, supposons que $(\mathcal{A}_\beta, \widehat{\mathcal{E}})$ soit fermable. On note $\widehat{\mathbb{D}}_{\mathcal{A}_\beta}$ le domaine de sa plus petite extension fermée. Nous pouvons voir que $(\widehat{\mathbb{D}}_{\mathcal{A}_\beta}, \widehat{\mathcal{E}})$ possède un gradient à valeurs dans $L^2(\nu; H)$ (qui n'est autre que la plus petite extension fermée de (\mathcal{A}_β, D_C)). Soient J l'isométrie canonique entre H et une copie \widehat{H} de H et $(\widehat{\mathbb{D}}_{\mathcal{A}_\beta})_H$ le domaine vectoriel associé. D'après la proposition 2.2.1, l'application identité de H appartient à $(\widehat{\mathbb{D}}_{\mathcal{A}_\beta})_H$. Ainsi, nous déduisons de la proposition 2.2.2 que $C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip \subset \widehat{\mathbb{D}}_{\mathcal{A}_\beta}$ et donc que $(C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip, \widehat{\mathcal{E}})$ est fermable. De plus, le domaine de sa plus petite extension fermée, noté $\widehat{\mathbb{D}}$, vérifie $\widehat{\mathbb{D}} \subset \widehat{\mathbb{D}}_{\mathcal{A}_\beta}$. Le résultat est prouvé.

Preuve du lemme 3.2.4

Posons $N = \{e_i \in \beta_0 \mid \Sigma(e_i) = 0\}$ et supposons que $e_{i_1} \in N$. En utilisant le caractère local de \mathcal{E} ([1], p.28) on obtient $\mathcal{E}[\langle e_{i_1}, U_1 \rangle] = 0$. Ainsi, lorsque $F = f(\langle e_{i_1}, \cdot \rangle, \dots, \langle e_{i_p}, \cdot \rangle) \in \mathcal{A}_{\beta_0}$, nous avons

$$\widehat{\mathcal{E}}[F] = \sum_{k,l=2}^p \int_H f'_k f'_l(0, \langle e_{i_2}, \cdot \rangle, \dots, \langle e_{i_p}, \cdot \rangle) \mathcal{E}[\langle e_{i_k}, U_1 \rangle, \langle e_{i_l}, U_1 \rangle] d\nu. \quad (3.3)$$

En posant

$$\mathcal{A}_{\beta_0 \setminus N} = \{F(\langle e_{i_1}, \cdot \rangle, \dots, \langle e_{i_n}, \cdot \rangle); n \in \mathbb{N}^*, (e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \in \beta_0 \setminus N, F \in C^1 \cap Lip\}$$

nous déduisons de la relation (3.3) que

$$(\mathcal{A}_{\beta_0 \setminus N}, \widehat{\mathcal{E}}) \text{ fermable} \Leftrightarrow (\mathcal{A}_{\beta_0}, \widehat{\mathcal{E}}) \text{ fermable.}$$

Comme la restriction de Σ à $vect(\beta_0 \setminus N)$ est injective, la conclusion est immédiate.

Preuve du lemme 3.2.5

L'idée essentielle de la preuve est tirée de [3]. On définit

$$\mathcal{P}(V^*) = \{Fk \mid F \in \mathcal{A}_{\beta_0}, k \in \text{dom}(V^*)\} \subset L^2(\nu; H)$$

où V^* est l'adjoint de V . Nous étendons alors, de manière naturelle, D_C à $\mathcal{P}(V^*)$ en posant

$$D_C[Fk] = D_C[F] \otimes k$$

où \otimes est le produit tensoriel sur H . En utilisant [3], p.4, on montre que l'opérateur

$$W[\psi](x) = -\text{trace}(D_C[\psi](x)) + \langle \Sigma^{-\frac{1}{2}}x, V^*\psi(x) \rangle, \quad \text{dom}(W) = \mathcal{P}(V^*),$$

est bien défini et que $(W, \text{dom}(W))$ et $(D_C, \mathcal{A}_{\beta_0})$ sont adjoints.

Si nous supposons V fermable, un résultat classique ([4], theo. 5.28) entraîne la densité de $\text{dom}(V^*)$ dans H . Ainsi, $\text{dom}(W)$ est dense dans $L^2(\nu; H)$. Comme W et D_C sont adjoints, D_C est fermable.

Réciproquement, soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans H telle que $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $Vh_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$. Si $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap Lip$ (avec une constante de Lipschitz égale à c) vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, nous avons

$$\int_H |f(\langle x, \Sigma^{-\frac{1}{2}}h_n \rangle)|^2 d\nu(x) \leq c \|h_n\|^2,$$

ainsi, $f(\langle \cdot, \Sigma^{-\frac{1}{2}}h_n \rangle) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ dans $L^2(\nu)$. De plus,

$$D_C[f(\langle \cdot, \Sigma^{-\frac{1}{2}}h_n \rangle)](x) - f'(0)u = [f'(\langle x, \Sigma^{-\frac{1}{2}}h_n \rangle) - f'(0)]Vh_n + [Vh_n - u]f'(0).$$

Comme $\|Vh_n\|$ est bornée,

$$D_C[f(\langle \cdot, \Sigma^{-\frac{1}{2}}h_n \rangle)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(0)u \quad \text{dans } L^2(\nu; H).$$

D'après le lemme 3.2.3, si $(D_C, \mathcal{A}_{\beta_0})$ est fermable alors $(D_C, C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip)$ est fermable et donc $u = 0$. Le lemme est démontré.

Bibliographie

- [1] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter, Berlin, 1991.
- [2] R. M. Dudley, Metric entropy and the central limit theorem in $C(S)$, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **24** (1974), no. 2, v, 49–60.
- [3] B. Goldys, F. Gozzi and J. M. A. M. van Neerven, On closability of directional gradients, *Potential Anal.* **18** (2003), no. 4, 289–310.
- [4] T. Kato, *Perturbation Theory For Linear Operators*, Springer-Verlag, 1992.
- [5] H. H. Kuo, *Gaussian measures in Banach spaces*, Lecture Notes in Math., 463, Springer, Berlin, 1975.
- [6] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Springer, Berlin, 1991.

Chapitre 4

Extensions du théorème de Donsker

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication dans *Electronic Journal of Probability* ([8]).

Nous adoptons les notations introduites dans la section 2.2.4. Ainsi, $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$ est l'espace de Wiener équipé de la norme uniforme sur $[0, 1]$ et μ la mesure de Wiener sur \mathcal{C} . Le processus $(B_t)_{t \in [0,1]}$ défini par $B_t : f \in \mathcal{C} \mapsto f(t)$ est, sous μ , un mouvement Brownien continu et nous notons $S_{OU} = (\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu, \mathbb{D}_{OU}, \Gamma_{OU})$ la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathcal{C} .

Nous allons poursuivre, dans ce chapitre, l'étude effectuée dans [7] sur le raffinement, en termes de formes de Dirichlet, du théorème de Donsker concernant la convergence d'une promenade aléatoire. Rappelons, dans un premier temps, ce résultat probabiliste classique ([11]) : Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, centrées et réduites. On interpole la promenade aléatoire $\sum_{k=1}^n U_k$ par le processus affine par morceaux $(X_n(t))_{t \in [0,1]}$ défini par

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1} \right) \quad (4.1)$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x . Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 4.0.1 *Le processus $(X_n(t))_{t \in [0,1]}$ converge en loi dans \mathcal{C} vers μ .*

Dans [7], Bouleau s'intéresse à la convergence en loi de Dirichlet du processus $(X_n(t))_{t \in [0,1]}$ lorsque les U_k sont supposées erronées, les erreurs étant modélisées par des structures d'erreur. Il montre, sous des hypothèses d'indépendance et de stationnarité sur les erreurs, le résultat naturel suivant :

Théorème 4.0.2 *Le processus $(X_n(t))_{t \in [0,1]}$ converge en loi de Dirichlet vers S_{OU} .*

Notons qu'à la différence de la preuve du théorème 3.1.1, la principale difficulté est ici de démontrer la convergence de la suite $(\mathcal{E}[F(X_n)])_{n \in \mathbb{N}^*}$, pour $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$. Cela nécessite une extension purement probabiliste du théorème 4.0.1 pour les fonctions continues sous quadratiques.

Le but de ce chapitre est de généraliser le théorème 4.0.2 pour certaines intégrales stochastiques du processus X_n .

Plan du chapitre 4 : Dans la partie 1, nous nous intéressons à la convergence en loi de Dirichlet du processus

$$Y_n^h = \int_0^\cdot h(s) dX_n(s), \quad h \in L^2([0, 1], dx).$$

Le résultat obtenu est très général et ne nécessite aucune condition de régularité sur la fonction h . Il est complété par l'étude d'approximations en temps continu de certains processus gaussiens réguliers incluant le cas du mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0, 1[$. La partie 2 est consacrée au raffinement d'un résultat de Bardina et Jolis ([2]) concernant la convergence de l'intégrale multiple

$$\int_{[0,t]^p} h(x_1, \dots, x_p) dX_n(x_1) \dots dX_n(x_p) \quad (4.2)$$

où h est une multi-mesure ([19]). Dans ce cas, à l'aide d'une simple intégration par parties, on montre que (4.2) est donnée par un opérateur continu du processus X_n . La régularité de cet opérateur est compatible avec le calcul d'erreur et permet de déduire la convergence en loi de Dirichlet de l'intégrale (4.2) du théorème 4.0.2. Enfin, nous démontrons succinctement dans la partie 3 que les résultats précédemment obtenus se généralisent dans le cadre du théorème de Lindeberg-Feller fonctionnel ([10], p.226).

D'un point de vue technique, l'outil principal est l'amélioration, pour la distance de Wasserstein ([15]), de résultats asymptotiques probabilistes.

Dans ce chapitre, C désigne une constante, indépendante de tout paramètre, dont la valeur peut varier d'un cas à l'autre. De plus, pour toute fonction h à valeurs réelles, on note h_+ (resp. h_-) la partie positive (resp. négative) de h .

4.1 Premiers résultats de convergence

Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, définies sur un espace (W, \mathcal{W}, P) , centrées et réduites. Soit $h \in L^2([0, 1], dx)$, on s'intéresse dans cette partie à la convergence en loi de Dirichlet du processus continu Y_n^h , défini sur $[0, 1]$ de la manière suivante :

$$Y_n^h(t) = \int_0^t h(s) dX_n(s) = \sqrt{n} \sum_{k=1}^n U_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) I_{[0,t]}(s) ds.$$

4.1.1 Convergence en loi de Y_n^h

Nous étudions, en premier lieu, la convergence en loi dans \mathcal{C} du processus Y_n^h vers l'intégrale Brownienne correspondante. Comme le processus X_n est une semi-martingale continue, des conditions très générales, dépendant de la régularité de h , existent dans la littérature. Lorsque h est cad-lag (continue à droite avec limite à gauche), une condition suffisante pour X_n est de vérifier la célèbre condition $U.T$ due à Jakubowski, Mémin et Pagès ([14] ou [16] pour une formulation équivalente). Comme les X_n ont des trajectoires à variations bornées, d'après la proposition 6.12, p.378, de [13], cette condition $U.T$ est équivalente à la tension de la suite $(Var(X_n)_t)_{n \in \mathbb{N}^*}$, pour tout $t \in [0, 1]$, $Var(X_n)$ étant le processus de variations défini par

$$Var(X_n)_t = \sup \sum |X(t_{k+1}) - X(t_k)|$$

(le sup étant pris sur toutes les partitions de l'intervalle $[0, t]$). Comme

$$Var(X_n)_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} |U_k| + (nt - [nt]) |U_{[nt]+1}| \right),$$

cela n'est manifestement pas le cas. On peut aussi trouver dans [13], chap.9, un critère imposant la convergence en variation des composantes de la caractéristique de la semi-martingale X_n vers celles du mouvement Brownien qui n'est pas vérifié ici. Nous allons donc procéder à une étude directe, en supposant dans un premier temps h continue puis en raisonnant par approximation.

Proposition 4.1.1 *Lorsque $h \in C([0, 1], \mathbb{R})$, la suite $(Y_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi dans \mathcal{C} vers $Y^h = \int_0^\cdot h(s) dB_s$.*

Preuve : On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in 0, \dots, n$, $x_{k,n} = \frac{k}{n}$. On définit alors

$$\widetilde{Y}_n^h(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} h(x_{k,n}) U_k + (nt - [nt]) h(x_{[nt]+1,n}) U_{[nt]+1} \right).$$

D'après une version fonctionnelle du principe d'invariance de Lindeberg-Feller ([10], p.226), \widetilde{Y}_n^h converge en loi dans \mathcal{C} vers Y^h . Pour conclure, il suffit de démontrer que les processus Y_n^h et \widetilde{Y}_n^h sont contigus au sens où, $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(\|\widetilde{Y}_n^h - Y_n^h\|_\infty > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} Y_n^h(t) - \widetilde{Y}_n^h(t) &= \underbrace{\sqrt{n} \sum_{k=1}^{[nt]} U_k \int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}} [h(s) - h(x_{k,n})] ds}_{A_n(t)} \\ &\quad + \underbrace{\sqrt{n} U_{[nt]+1} \int_{\frac{[nt]}{n}}^t [h(s) - h(x_{[nt]+1,n})] ds}_{B_n(t)}. \end{aligned}$$

De plus, comme

$$\|A_n\|_\infty = \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j U_k \int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}} [h(s) - h(x_{k,n})] ds \right|,$$

d'après l'inégalité de Doob,

$$\mathbb{E}_P[\|A_n\|_\infty^2] \leq 4n \sum_{k=1}^n \left[\int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}} [h(s) - h(x_{k,n})] ds \right]^2.$$

En utilisant l'uniforme continuité de h , le second membre de l'inégalité précédente tend vers 0. Pour le second terme, nous avons

$$\begin{aligned} P(\|B_n\|_\infty > \varepsilon) &\leq P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |U_k| > \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2 \|h\|_\infty} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n P\left(|U_k| > \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2 \|h\|_\infty} \right) \\ &\leq C \mathbb{E}_P \left[U_1^2 I_{\left\{ |U_1| > \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2 \|h\|_\infty} \right\}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

et donc le résultat. \square

L'argument de la preuve précédente ne peut être adapté pour $h \in L^2([0, 1], dx)$ quelconque. En effet, si on prend $h = I_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ on a $\widetilde{Y}_n^h = 0$ et $Y_n^h = X_n$. On a cependant le résultat suivant :

Proposition 4.1.2 *Lorsque $h \in L^2([0, 1], dx)$, la suite $(Y_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi dans \mathcal{C} vers le processus Y^h .*

Preuve : Il nous suffit, d'après le lemme de Portmanteau ([20]), de montrer que pour toute fonction $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne et bornée

$$\mathbb{E}_P[\Phi(Y_n^h)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu[\Phi(Y^h)].$$

Soit g une fonction continue telle que $\|h - g\|_{L^2([0,1],dx)} \leq \varepsilon$. Nous avons

$$\mathbb{E}_P[\Phi(Y_n^h)] - \mathbb{E}_\mu[\Phi(Y^h)] = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$$

où $\alpha_n = \mathbb{E}_P[\Phi(Y_n^h) - \Phi(Y_n^g)]$, $\beta_n = \mathbb{E}_P[\Phi(Y_n^g)] - \mathbb{E}_\mu[\Phi(Y^g)]$ et $\gamma_n = \mathbb{E}_\mu[\Phi(Y^g) - \Phi(Y^h)]$.

Comme Φ est lipschitzienne, d'après l'inégalité de Doob,

$$|\gamma_n| \leq C \mathbb{E}_\mu[\|Y^g - Y^h\|_\infty^2]^{\frac{1}{2}} \leq 2C \|h - g\|_{L^2([0,1],dx)} \leq 2C\varepsilon.$$

De même,

$$\alpha_n \leq C \left[\mathbb{E}_P[\|Y_n^{(g-h)_+}\|_\infty^2]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}_P[\|Y_n^{(g-h)_-}\|_\infty^2]^{\frac{1}{2}} \right] = C[\alpha_{n,1} + \alpha_{n,2}].$$

Les trajectoires du processus $Y_n^{(g-h)_+}$ étant monotones par morceaux,

$$|\alpha_{n,1}| = \mathbb{E}_P \left[n \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=1}^k U_j \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} (g-h)_+(s) ds \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

En appliquant de nouveau l'inégalité de Doob et l'inégalité de Schwarz,

$$|\alpha_{n,1}| \leq 2C \left(n \sum_{j=1}^n \left[\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} (g-h)_+(s) ds \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2C\varepsilon.$$

On utilise la même idée pour traiter $\alpha_{n,2}$ et on obtient $|\alpha_{n,2}| \leq 2C\varepsilon$.

Pour β_n , on conclut en utilisant la proposition 4.1.1 pour la variable Y_n^g car g est continue. \square

Remarque 1 : En adaptant la preuve précédente, on peut montrer que lorsque $\|h_n - h\|_{L^2([0,1],dx)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $Y_n^{h_n}$ converge en loi dans \mathcal{C} vers Y^h . \bullet

4.1.2 Convergence en loi de Dirichlet au sens des marginales fini-dimensionnelles

Nous supposons ici que les U_k sont erronées (les erreurs étant modélisées par des structures d'erreur) en imposant une condition d'indépendance et d'équidistribution pour les erreurs. En d'autres termes, les U_k sont les coordonnées de la structure produit

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda, d, \gamma)^{\mathbb{N}^*},$$

la structure $s = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda, d, \gamma)$ étant telle que l'application identité de \mathbb{R} notée i soit dans d et que $\mathbb{E}_\lambda[i] = 0$ et $\mathbb{E}_\lambda[i^2] = 1$. On suppose de plus, sans perte de généralités, que $e[i] = 1$ où e est la forme de Dirichlet associée à s . Ainsi, les U_k sont des variables i.i.d sur W , de loi λ , telles que $U_k \in \mathbb{D}$ avec

$$\Gamma[U_n, U_m] = \delta_n^m \gamma[i](U_n) \quad (4.3)$$

où $\delta_n^m = 1$ si $n = m$ et $\delta_n^m = 0$ sinon.

Remarque 2 : En adaptant l'argument développé au début de la section 3.2, nous pourrions supposer uniquement que les U_k sont Dirichlet indépendantes, de même \mathbb{D} -loi et nous ramener à la situation décrite ci-dessus. •

Nous démontrons, tout d'abord, un lemme technique qui sera utilisé par la suite.

Lemme 4.1.1 *Supposons que p soit un entier pair. Lorsque $h \in L^p([0, 1])$ et $p \geq 1$, nous avons*

$$V_n^{h,p} = n^{p-1} \sum_{j=1}^n \left[\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} h(s) ds \right]^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h^p(s) ds.$$

Preuve : Le résultat est connu lorsque h est continue car, en appliquant le théorème des accroissements finis, $V_n^{h,p}$ est une somme de Riemann. Pour le cas général on raisonne par approximation. Soit g une fonction continue telle que $\|h - g\|_{L^p([0,1])} \leq \varepsilon$. Ainsi,

$$V_n^{h,p} - \int_0^1 h^p(s) ds = \underbrace{V_n^{h,p} - V_n^{g,p}}_{\alpha_n} + \underbrace{V_n^{g,p} - \int_0^1 g^p(s) ds}_{\beta_n} + \underbrace{\int_0^1 (g^p - h^p)(s) ds}_{\gamma_n}.$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\text{Max}(V_n^{h,p}, V_n^{g,p}) \leq \text{Max}(\|h\|_{L^p([0,1])}^p, \|g\|_{L^p([0,1])}^p).$$

La fonction $x \mapsto x^p$ étant localement lipschitzienne, en appliquant l'inégalité de Minkowski,

$$|\alpha_n| \leq C(V_n^{h-g,p})^{\frac{1}{p}} \leq C\|h-g\|_{L^p([0,1])} \leq C\varepsilon \quad \text{et} \quad |\gamma_n| \leq C\varepsilon.$$

Enfin, g étant continue, le terme β_n converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. \square

Nous avons alors la proposition suivante qui établit la convergence en loi de Dirichlet au sens des marginales fini-dimensionnelles (définition 0.4.3) du processus Y_n^h .

Proposition 4.1.3 $\forall (t_1, \dots, t_p) \in [0, 1]^p$, la suite $(Y_n^h(t_1), \dots, Y_n^h(t_p))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi de Dirichlet vers $(Y^h(t_1), \dots, Y^h(t_p))_* S_{OU}$.

Preuve : Nous allons traiter le cas $p = 1$, le cas général se traitant de la même manière. Il est facile de voir, par définition de S_{OU} (section 2.2.4), que $Y^h(t_1) \in \mathbb{D}_{OU}$ avec $\Gamma_{OU}[Y^h(t_1)] = \int_0^{t_1} h^2(s) ds$. En vertu de la proposition 4.1.2, il nous suffit, pour conclure, de démontrer que, $\forall F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$2\mathcal{E}[F(Y_n^h(t_1))] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\mathcal{E}_{OU}[F(Y^h(t_1))] = \int_0^{t_1} h^2(s) ds \times \int_{\mathcal{C}} F'^2(Y^h(t_1)) d\mu.$$

D'après le calcul fonctionnel et la propriété (4.3), nous avons

$$2\mathcal{E}[F(Y_n^h(t_1))] = \mathbb{E}_P[F'^2(Y_n^h(t_1))\Gamma[Y_n^h(t_1)]]$$

avec

$$\Gamma[Y_n^h(t_1)] = n \sum_{k=1}^{[nt_1]} \gamma[i](U_k) \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) ds \right]^2 + \underbrace{n\gamma[i](U_{[nt_1]+1}) \left[\int_{\frac{[nt_1]}{n}}^{t_1} h(s) ds \right]^2}_{Z_n(t_1)}.$$

Or, $|Z_n(t_1)| \leq \gamma[i](U_{[nt_1]+1}) \int_{\frac{[nt_1]}{n}}^{t_1} h^2(s) ds$ et donc $Z_n(t_1)$ tend vers 0 dans $L^1(P)$. Il nous reste donc à étudier le terme

$$n \mathbb{E}_P \left[F'^2(Y_n^h(t_1)) \sum_{k=1}^{[nt_1]} \gamma[i](U_k) \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) ds \right]^2 \right].$$

On note $\widehat{\psi}_n$ la transformée de Fourier de la mesure ν_n définie par

$$d\nu_n = Y_n^h(t_1)_* \left(n \sum_{k=1}^{[nt_1]} \gamma[i](U_k) \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) ds \right]^2 dP \right).$$

En utilisant l'indépendance des U_k , un rapide calcul montre que

$$\widehat{\psi}_n(u) = \mathbb{E}_P \left[e^{iuY_n^h(t_1)} \right] \left(n \sum_{k=1}^{[nt_1]} \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) ds \right]^2 g_{n,k}(u) \right)$$

où

$$g_{n,k}(u) = \frac{\mathbb{E}_P \left[e^{iu\sqrt{n}U_1 \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) ds} \Gamma[U_1] \right]}{\mathbb{E}_P \left[e^{iu\sqrt{n}U_1 \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) ds} \right]}.$$

De plus, nous déduisons, de l'inégalité de Schwarz et de l'uniforme continuité de la fonction $\sqrt{\int_0^{\cdot} h^2(s) ds}$ sur $[0, 1]$, que

$$\sup_{k \in \{0, \dots, n\}} |g_{n,k}(u) - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Enfin, comme

$$n \sum_{k=1}^n \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} I_{[0, t_1]}(s) h(s) ds \right]^2 - n \sum_{k=1}^{[nt_1]} \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) ds \right]^2 = n \left[\int_{\frac{[nt_1]}{n}}^{t_1} h(s) ds \right]^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

le résultat est une conséquence du lemme 4.1.1 et de la proposition 4.1.2. \square

4.1.3 Convergence en loi de Dirichlet

Nous donnons maintenant une extension fonctionnelle de la proposition précédente en montrant, sous une hypothèse peu restrictive, la convergence en loi de Dirichlet de la suite de processus continus $(Y_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la structure d'erreur $(Y^h)_* S_{OU}^h$ (notée dorénavant S_{OU}^h).

Remarque 3 : Il est facile de voir, d'après les remarques de la section 2.2.4, que $Y^h \in (\mathbb{D}_{OU})_{\mathcal{C}}$ et donc que la structure S_{OU}^h est bien définie (définition 2.2.2). Si on note \mathcal{E}_{OU}^h la forme de Dirichlet associée, nous avons, en vertu de la proposition 2.2.2, $\forall F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$\mathcal{E}_{OU}^h[F] = \mathcal{E}_{OU}[F(Y^h)] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \int_{\widehat{\mathcal{C}}} \left\langle F' \left(\int_0^{\cdot} h(s) dB_s \right), \int_0^{\cdot} h(s) d\widehat{B}_s \right\rangle^2 d\mu d\widehat{\mu}$$

où \widehat{B} est le mouvement Brownien associé à une copie $(\widehat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{B}}(\widehat{\mathcal{C}}), \widehat{\mu})$ de $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu)$. \bullet

Pour cela, nous supposons que la structure $s = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda, d, \gamma)$ possède un gradient et on note $'$ un opérateur de dérivation associé (le choix de l'isométrie

sous jacente n'étant pas précisé) construit à l'aide d'une copie $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{R}), \widehat{\lambda})$ de l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $\#$ l'opérateur de dérivation sur la structure produit $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ que l'on déduit de $'$ (section 3.2 ou [5], p.79). En notant \widehat{U}_n les applications coordonnées de l'espace $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$, nous avons, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$F(U_1, \dots, U_p)^\# = \sum_{k=1}^p F'_k(U_1, \dots, U_p) i'_k(U_k, \widehat{U}_k).$$

On montre, ainsi, que le processus Y_n^h est dans \mathbb{D}_C et que

$$(Y_n^h)^\#(t) = \sqrt{n} \sum_{k=1}^n U_k^\# \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) I_{[0,t]}(s) ds.$$

En vertu du calcul fonctionnel généralisé (proposition 2.2.2), si $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$, on a

$$\mathcal{E}[F(Y_n^h)] = \frac{1}{2} \int_W \int_{\widehat{W}} \langle F'(Y_n^h), (Y_n^h)^\# \rangle^2 d\widehat{P} dP. \quad (4.4)$$

Les (U_k, \widehat{U}_k) étant par construction i.i.d, centrées et de matrice de covariance égale à la matrice identité, l'extension multi-dimensionnelle de la proposition 4.1.2 (qui est immédiate) nous assure la convergence en loi dans \mathcal{C}^2 du processus $(Y_n^h, (Y_n^h)^\#)$ vers $(\int_0^\cdot h(s) dB_s, \int_0^\cdot h(s) d\widehat{B}_s)$. On pose

$$\phi : (x, y) \in \mathcal{C}^2 \mapsto \langle F'(x), y \rangle^2$$

et on remarque que ϕ est une fonction continue et sous quadratique. Pour conclure, il nous suffit de prouver l'extension suivante de la proposition 4.1.2 qui a été démontrée dans le cadre du théorème de Donsker dans [7].

Proposition 4.1.4 *Soit $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, $\forall x \in \mathcal{C}$, $|\phi(x)| \leq C(1 + \|x\|_\infty^2)$, alors,*

$$\mathbb{E}_P[\phi(Y_n^h)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu[\phi(Y^h)].$$

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin de l'inégalité maximale suivante ([3], p.69) :

Lemme 4.1.2 *Soient (ξ_1, \dots, ξ_n) des variables aléatoires centrées, indépendantes et de variances finies notées $(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$. Si on note, $\forall 1 \leq i \leq n$, $s_i^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_i^2$ et $S_i = \xi_1 + \dots + \xi_i$, alors, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,*

$$P \left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda s_n \right) \leq 2P(|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2}) s_n).$$

Preuve de la proposition 4.1.4 : D'après le lemme 2.2.2, il suffit de démontrer l'équi-intégrabilité des variables $\|Y_n^h\|_\infty^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on s'intéresse à la quantité

$$A_{n,\alpha} = \mathbb{E}_P[\|Y_n^h\|_\infty^2 I_{\{\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq \alpha\}}].$$

D'après le théorème de Fubini,

$$A_{n,\alpha} = \alpha P(\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq \alpha) + \int_\alpha^\infty P(\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq t) dt.$$

On note $Y_n^{h+}(t) = \int_0^t h_+(s) dX_n(s)$ et $Y_n^{h-}(t) = \int_0^t h_-(s) dX_n(s)$, ainsi,

$$\begin{aligned} A_{n,\alpha} \leq & \underbrace{\alpha P(\|Y_n^{h+}\|_\infty^2 \geq \frac{\alpha}{4}) + \int_\alpha^\infty P(\|Y_n^{h+}\|_B^2 \geq \frac{t}{4}) dt}_{B_{n,\alpha}} \\ & + \underbrace{\alpha P(\|Y_n^{h-}\|_\infty^2 \geq \frac{\alpha}{4}) + \int_\alpha^\infty P(\|Y_n^{h-}\|_B^2 \geq \frac{t}{4}) dt}_{C_{n,\alpha}}. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que

$$\lim_n \sup_{\alpha \rightarrow \infty} B_{n,\alpha} \rightarrow 0,$$

la méthode étant la même pour le terme $C_{n,\alpha}$. Comme $h_+ \geq 0$, les trajectoires de Y_n^{h+} sont monotones par morceaux et atteignent leurs extrema locaux aux points de la forme $\frac{k}{n}$. Ainsi,

$$\|Y_n^{h+}\|_\infty = \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=1}^k U_j \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} h_+(s) ds \right|.$$

En utilisant le lemme 4.1.2, nous avons

$$P(\|Y_n^{h+}\|_\infty \geq t) \leq 2P \left(\left| \sqrt{n} \sum_{k=1}^n U_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h_+(s) ds \right| \geq t - \sqrt{2s_n^2} \right)$$

où $s_n^2 = n \sum_{k=1}^n \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h_+(s) ds \right]^2$. On a donc

$$B_{n,\alpha} \leq 2\alpha P \left(|Y_n^{h+}(1)| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} - \sqrt{2s_n^2} \right) + 2\mathbb{E}_P \left[\left([Y_n^{h+}(1) + \sqrt{2s_n^2}]^2 - \alpha \right)_+ \right].$$

Or, nous savons que $\frac{|Y_n^{h+}(1)|}{\sqrt{\int_0^1 h_+^2(s)ds}}$ converge en loi vers une variable $|N|$ où N est, sous P , une loi normale centrée et réduite. De plus, d'après le lemme 4.1.1, $\sqrt{2s_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 \int_0^1 h_+^2(s)ds}$. Ainsi, le théorème de Dini entraîne

$$\alpha P \left(|Y_n^{h+}(1)| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} - \sqrt{2s_n^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha P \left(|N| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\int_0^1 h_+^2(s)ds}} - \sqrt{2} \right).$$

Enfin, les U_k étant indépendantes, nous déduisons du lemme 4.1.1 que

$$\mathbb{E}_P \left[(Y_n^{h+}(1))^2 \right] = s_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h_+^2(s)ds = \mathbb{E}_\mu \left[(Y^{h+}(1))^2 \right],$$

ainsi, d'après le lemme 2.2.2, les variables $(Y_n^{h+}(1))^2$ sont équi-intégrables. On a alors

$$\mathbb{E}_P \left[\left([Y_n^{h+}(1) + \sqrt{2s_n^2}]^2 - \alpha \right)_+ \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P \left[\left(\int_0^1 h_+^2(s)ds [N + \sqrt{2}]^2 - \alpha \right)_+ \right]$$

et donc

$$\lim_n \sup B_{n,\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0. \square$$

En appliquant la proposition précédente à (4.4), on montre que

$$2\mathcal{E}[F(Y_n^h)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} \left\langle F' \left(\int_0^\cdot h(s)dB_s \right), \int_0^\cdot h(s)d\widehat{B}_s \right\rangle^2 d\mu d\widehat{\mu}.$$

D'après la remarque 3, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 4.1.5 *La suite de processus continus $(Y_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi de Dirichlet vers S_{OU}^h .*

Remarque 4 : En prenant $h = 1$, on retrouve l'extension du principe d'invariance de Donsker-Prokhorov démontré dans [7]. De plus, il est facile de voir que la proposition précédente s'étend au cas de la suite $(Y_n^{h_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $\|h_n - h\|_{L^2([0,1],dx)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \bullet$

4.1.4 Le cas des processus gaussiens généraux

Nous voulons, dans cette partie, étendre le résultat précédent en étudiant la convergence en loi de Dirichlet d'approximations de processus gaussiens généraux construites à l'aide du processus X_n . Soit $(Y^K(t))_{t \in [0,1]}$ un processus gaussien à trajectoires continues de la forme $Y^K(t) = \int_0^1 K(t, s) dB_s$, on s'intéresse, ici, à la convergence du processus continu $Y_n^K(t) = \int_0^1 K(t, s) dX_n(s)$. Contrairement aux résultats obtenus dans le chapitre 2, nous allons devoir imposer des conditions de régularité sur le noyau $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Cela s'explique par le fait que la convergence du processus X_n vers le mouvement Brownien est moins forte que celle de la série aléatoire considérée dans la section 2.3.1.

Nous supposons dorénavant que K vérifie les deux hypothèses suivantes :

i) K est mesurable et $K(0, r) = 0$, $r \in [0, 1]$.

ii) Il existe une fonction $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue et croissante et un réel $\alpha > 0$ tels que, pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$,

$$\int_0^1 (K(t_2, r) - K(t_1, r))^2 dr \leq (G(t_2) - G(t_1))^\alpha.$$

Remarque 5 : Les conditions ci-dessus sont issues de [9]. Dans cet article, les auteurs étudient la convergence en loi de l'approximation du processus Y^K construite à l'aide du noyau de Strook (les restrictions sur K permettant de démontrer la tension de l'approximation). De plus, plusieurs exemples de processus vérifiant i) et ii) sont donnés : c'est le cas, en particulier, du mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $0 < H < 1$ ou du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. ●

On a tout d'abord le lemme suivant dont la démonstration, qui se déduit aisément de la définition 2.1.2, est laissée au lecteur.

Lemme 4.1.3 *Le processus Y_n^K (resp. Y^K) appartient à \mathbb{D}_C (resp. $(\mathbb{D}_{OU})_C$) avec*

$$(Y_n^K)^\# = \int_0^1 K(., s) dX_n^\#(s) \quad \left(\text{resp. } (Y^K)^\# = \int_0^1 K(., s) d\widehat{B}_s \right).$$

Remarque 6 : En vertu du lemme précédent, on est en droit d'envisager la structure d'erreur $(Y^K)_* S_{OU}$ sur l'espace de Wiener. Cette structure, qui vérifie la propriété (G) , a été étudiée dans [1] où les auteurs développent un calcul stochastique par rapport au processus Y^K et examinent ses propriétés en fonction de la régularité du noyau K . ●

Lorsque $K(t, s) = I_{[0,t]}(s)h(s)$ avec $h \in L^2([0, 1], dx)$, on a $Y_n^K = Y_n^h$. Cependant, les trajectoires de Y_n^K ne sont plus, en général, monotones par morceaux (argument qui était crucial dans la preuve des propositions 4.1.2 et 4.1.4). En renforçant les conditions d'intégrabilité sur les U_k , on obtient néanmoins le résultat suivant :

Proposition 4.1.6 *Supposons que $U_1 \in L^p(P)$ avec $p > \frac{2}{\alpha} \vee 2$. Alors, le processus Y_n^K converge en loi dans \mathcal{C} vers le processus Y^K et les variables $\|Y_n^K\|_\infty^2$ sont équi-intégrables.*

Preuve : Pour la convergence en loi, il suffit de remarquer ([2]) que lorsque $U_1 \in L^p(P)$ et $f \in L^2([0, 1], dx)$, il existe une constante C_p , indépendante de n , telle que

$$\mathbb{E}_P \left[\left(\int_0^1 f(s) dX_n(s) \right)^p \right] \leq C_p \left(\int_0^1 f^2(s) ds \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (4.5)$$

On conclut en adaptant la preuve du théorème 1 de [9] : La convergence en loi des marginales fini-dimensionnelles du processus Y_n^K vers celles de Y^K est une conséquence de la proposition 4.1.2. En utilisant l'hypothèse *ii*) et l'inégalité (4.5), on a, $\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$,

$$\mathbb{E}_P [(Y_n^K(t_2) - Y_n^K(t_1))^p] \leq C_p (G(t_2) - G(t_1))^{\frac{p\alpha}{2}}. \quad (4.6)$$

Comme la condition *i*) implique, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n^K(0) = 0$, on obtient la tension de la suite $(Y_n^K)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en utilisant le théorème 12.3, p.95 de [3].

Pour démontrer l'équi-intégrabilité des variables $\|Y_n^K\|_\infty^2$, il suffit de prouver l'existence d'un réel $\beta > 2$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}_P [\|Y_n^K\|_\infty^\beta] < \infty.$$

En reprenant l'argument utilisé dans la preuve du théorème 12.3, p.95 de [3], l'inégalité (4.6) entraîne, $\forall \delta > 0$, $\exists C_\delta > 0$, $\forall \varepsilon > 0$,

$$F_{n,\delta}(\varepsilon) = P \left(\sup_{|s-t| \leq \delta} |Y_n^K(t) - Y_n^K(s)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{C_\delta}{\varepsilon^p}. \quad (4.7)$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\beta = p - \varepsilon_0 > 2$, on a, à l'aide de (4.7) et d'une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P \left[\sup_{|s-t| \leq \delta} |Y_n^K(t) - Y_n^K(s)|^\beta \right] &\leq \beta \left(\int_0^\infty y^{\beta-1} F_{n,\delta}(y) dy \right) \\ &\leq \beta \left(1 + \frac{C_\delta}{\varepsilon_0} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Comme

$$\mathbb{E}_P[\|Y_n^K\|_\infty^\beta] \leq 2^\beta \left(\mathbb{E}_P \left[\sup_{|s-t| \leq \frac{1}{2}} |Y_n^K(t) - Y_n^K(s)|^\beta \right] + \mathbb{E}_P [|Y_n^K(1/2)|^\beta] \right),$$

le résultat découle de (4.6) et (4.8). \square

Par un raisonnement analogue à celui de la section précédente, on a alors le résultat suivant :

Proposition 4.1.7 *Si le noyau K vérifie les hypothèses i) et ii) et si $(U_1, U_1^\#) \in L^p(P) \times L^p(P \otimes \widehat{P})$ avec $p > \frac{2}{\alpha} \vee 2$, alors, le processus Y_n^K converge en loi de Dirichlet vers $(Y^K)_*S_{OU}$.*

4.2 Convergence des intégrales multiples où l'intégrant est une multi-mesure

Remarque 7 : Lorsque la fonction h est suffisamment régulière, la proposition 4.1.5 se déduit immédiatement de la convergence en loi de Dirichlet de X_n vers S_{OU} démontrée dans [7]. En effet, soit h une fonction à variations bornées, continue à droite, on note ν la mesure signée associée telle que $\nu([t, 1]) = h(t)$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on note $\bar{\nu}_t$ la mesure vérifiant, $\forall A \in \mathcal{B}([0, 1])$, $\bar{\nu}_t(A) = \nu(A(t))$ où $A(t) = A \cap [0, t]$ si $t \notin A$ et $A(t) = A \cup [t, 1]$ si $t \in A$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^t h(s) dX_n(s) = \int_0^t X_n(s) d\bar{\nu}_t(s) = \phi_h(X_n) \quad (4.9)$$

où $\phi_h : B \rightarrow B$ est une fonctionnelle de classe C^1 et lipschitzienne. Ainsi, comme X_n converge en loi de Dirichlet vers S_{OU} , $\phi_h(X_n)$ converge en loi de Dirichlet vers $\phi_h *_S S_{OU}$. Or, d'après la formule d'Itô,

$$\int_0^t h(s) dB_s = \int_0^t B_s d\bar{\nu}_t(s),$$

donc

$$\phi_h *_S S_{OU} = \left(\int_0^\cdot h(s) dB_s \right) *_S S_{OU} \bullet$$

Nous allons généraliser l'exemple ci-dessus au cas des intégrales multiples données par une multi-mesure. Soit $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique, on s'intéresse à la convergence en loi de Dirichlet d'intégrales de la forme

$$\int_{[0, \cdot]^p} h(x_1, \dots, x_p) dX_n(x_1) \dots dX_n(x_p). \quad (4.10)$$

Le problème de la convergence en loi de (4.10) est traité dans [2] en étudiant la question du prolongement continu, à l'espace de Wiener, de la fonctionnelle

$$\phi_h : \eta \in \mathcal{H} \mapsto \int_{[0, \cdot]^p} h(x_1, \dots, x_p) d\eta(x_1) \dots d\eta(x_p) \in \mathcal{C}, \quad (4.11)$$

\mathcal{H} étant l'espace de Cameron-Martin. Pour cela, nous avons besoin de la notion de multi-mesure (au sens de Nualart-Zakai [19]) qui permet une généralisation de la notion de fonctions à variations bornées pour les fonctions à plusieurs variables.

Définition 4.2.1 Une application $\nu : (\mathcal{B}([0, 1]))^p \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une multi-mesure si, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\forall (A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_p) \in (\mathcal{B}([0, 1]))^{p-1}$, l'application

$$A \in \mathcal{B}([0, 1]) \mapsto \mu(A_1, \dots, A_{i-1}, A, A_{i+1}, \dots, A_p)$$

est une mesure signée. On dit, de plus, que h est donnée par la multi-mesure ν si

$$h(x_1, \dots, x_p) = \nu([x_1, 1], \dots, [x_p, 1]).$$

Remarque 8 : Lorsque h est donnée par une multi-mesure, ses applications partielles sont des fonctions à variations bornées. La réciproque est fautive en général. •

La réponse est alors la suivante ([2], p.281) :

Théorème 4.2.1 Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- a) ϕ_h possède une extension continue sur \mathcal{C} .
- b) La fonction h est donnée par une multi-mesure symétrique ν .

De plus, l'extension de ϕ_h est telle que, $\forall \eta \in \mathcal{C}$,

$$\phi_h(\eta) = \int_{[0, \cdot]^p} \eta(x_1) \dots \eta(x_p) d\bar{\nu}(x_1, \dots, x_p)$$

où $(\bar{\nu}_t)_{t \in [0, 1]}$ est une famille de multi-mesures satisfaisant

$$\|\bar{\nu}_t\|_{FV} \leq \|\nu\|_{FV} \quad (\|\cdot\|_{FV} \text{ étant la variation de Fréchet}).$$

Ainsi, dans le cadre du théorème précédent, l'application ϕ_h est continue. Comme X_n est un processus qui converge en loi dans \mathcal{C} vers le mouvement Brownien, $\phi_h(X_n)$ converge en loi dans \mathcal{C} vers $\phi_h(B)$ qui n'est autre que l'intégrale multiple de Stratonovich de h . Cependant, pour déduire aisément la convergence en loi de Dirichlet de $\phi_h(X_n)$ de celle de X_n , il nous faudrait le caractère $C^1 \cap Lip$ de ϕ_h . Cela n'est pas le cas en général (sauf si $p = 1$), ϕ_h est seulement de classe C^1 et vérifie les inégalités suivantes

$$|\phi_h(x)| \leq \|\nu\|_{FV} \|x\|_{\infty}^p, \quad (4.12)$$

$$|\phi'_h(x)[\tilde{x}]| \leq p \|\nu\|_{FV} \|\tilde{x}\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1}. \quad (4.13)$$

Nous pallions ce problème en imposant des conditions d'intégrabilité sur le couple $(U_k, U_k^\#)$.

On énonce tout d'abord le résultat technique suivant qui, d'une certaine manière, généralise [4], p.39.

Proposition 4.2.1 *Soient $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur qui possède un gradient et B un espace de Banach qui vérifie la propriété d'approximation (A) (section 2.2.2). Soit $X \in \mathbb{D}_B$ tel que $\|X\|_B \in L^{2p}(P)$ et $\|X^\#\|_B \in L^{2p}(P \otimes \widehat{P})$. Lorsque $F \in C^1(B, \mathbb{R})$ vérifie $|F(x)| \leq C\|x\|_B^p$ et $\|F'(x)\| \leq C\|x\|_B^{p-1}$, on a*

$$F(X) \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad F(X)^\# = F'(X)[X^\#].$$

Preuve : On traite, dans un premier temps, le cas où F est une fonction cylindrique de la forme $f(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ avec, $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, $\lambda_i \in B'$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^q, \mathbb{R})$. Soit $(\psi_m)_{m \geq 0}$ une suite de fonctions de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à supports compacts telles que

$$\forall x, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(x) = x \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \psi'_m(x) = 1,$$

$$\forall m, \quad \forall x, \quad |\psi_m(x)| \leq |x| \quad \text{et} \quad |\psi'_m(x)| \leq 1.$$

On note $\Psi_m(x_1, \dots, x_q) = f(\psi_m(x_1), \dots, \psi_m(x_q))$. Par convergence dominée,

$$\Psi_m(\lambda_1(X), \dots, \lambda_q(X)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} F(X) \quad \text{dans} \quad L^2(P).$$

De plus, comme $\Psi_m \in C^1(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}) \cap Lip$ et $X \in \mathbb{D}_B$, on a

$$\Psi_m(\lambda_1(X), \dots, \lambda_q(X))^\# = \sum_{i=1}^q f'_i(\psi_m(\lambda_1(X)), \dots, \psi_m(\lambda_q(X))) \psi'_m(\lambda_i(X)) \lambda_i(X^\#)$$

et donc, par convergence dominée,

$$\Psi_m(\lambda_1(X), \dots, \lambda_q(X))^\# \xrightarrow{m \rightarrow \infty} F'(X)[X^\#] \quad \text{dans} \quad L^2(P \otimes \widehat{P}).$$

De la même manière, on montre que

$$\Psi_m(\lambda_1(X), \dots, \lambda_q(X)) - \Psi_{\tilde{m}}(\lambda_1(X), \dots, \lambda_q(X)) \xrightarrow{m, \tilde{m} \rightarrow \infty} 0 \quad \text{dans} \quad L^2(P),$$

$$\Psi_m(\lambda_1(X), \dots, \lambda_q(X))^\# - \Psi_{\tilde{m}}(\lambda_1(X), \dots, \lambda_q(X))^\# \xrightarrow{m, \tilde{m} \rightarrow \infty} 0 \quad \text{dans} \quad L^2(P \otimes \widehat{P})$$

et comme $\#$ est un opérateur fermé, le résultat en découle.

Comme B est un espace de Banach qui vérifie la propriété d'approximation (A), le cas général se traite en approchant F par des fonctions cylindriques régulières. \square

Remarque 9 : Lorsque $B = \mathbb{R}$, les conditions d'intégrabilité sur X et $X^\#$ entraînent $X \in \mathbb{D}_{2p}$ (au sens de [4], p.39). En ce sens, la proposition 4.2.1 est moins forte que [4], propo. 6.2.2, p.39, dans le cas où B est de dimension finie. Cependant, les conditions de [4] ne sont pas transposables à la dimension infinie car il n'y a pas de notion d'opérateur carré du champ sur \mathbb{D}_B alors que l'opérateur de dérivation y est bien défini. \bullet

Nous pouvons déduire de la proposition précédente un calcul fonctionnel vérifié par X_n .

Proposition 4.2.2 *On suppose que $(U_k, U_k^\#) \in L^{2p}(P) \times L^{2p}(P \otimes \widehat{P})$, alors, $\forall F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R})$ telle que $|F(x)| \leq C\|x\|_\infty^p$ et $\|F'(x)\| \leq C\|x\|_\infty^{p-1}$,*

$$F(X_n) \in \mathbb{D} \text{ et } F(X_n)^\# = F'(X_n)[X_n^\#].$$

Preuve : On utilise la proposition 4.2.1. Comme $U_k \in L^{2p}$ et comme $\|X_n\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^k U_j$, d'après l'inégalité de Doob, on a $\|X_n\|_\infty \in L^{2p}(P)$ (de même $\|X_n^\#\|_\infty^p \in L^2(P \otimes \widehat{P})$). \square

Corollaire 4.2.1 *a) Si $(U_k, U_k^\#) \in L^{2p}(P) \times L^{2p}(P \otimes \widehat{P})$, $\phi_h(X_n) \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ et $\phi_h(X_n)^\# = \phi'_h(X_n)[X_n^\#]$.*

b) $\phi_h(B) \in (\mathbb{D}_{OU})_{\mathcal{C}}$ et $\phi_h(B)^\# = \phi'_h(B)[\widehat{B}]$.

Preuve : *a)* est une conséquence immédiate de la proposition 4.2.2 alors que *b)* se déduit de la proposition 4.2.1 grâce aux propriétés d'intégrabilité du mouvement Brownien. \square

On est alors en droit d'étudier la convergence en loi de Dirichlet de $\phi_h(X_n)$ vers $\phi_h *_S OU$. Soit $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$. En notant $G = F(\phi_h)$, on a, d'après les inégalités (4.12) et (4.13) et le corollaire 4.2.1,

$$2\mathcal{E}[F(\phi_h(X_n))] = \int_W \int_{\widehat{W}} (G'(X_n)[X_n^\#])^2 dPd\widehat{P} = \int_W \int_{\widehat{W}} \Phi(X_n, X_n^\#) dPd\widehat{P} \tag{4.14}$$

où $\Phi : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant

$$|\Phi(x, y)| \leq C\|x\|_\infty^{2(p-1)}\|y\|_\infty^2 \leq C\max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)^{2p}.$$

Nous concluons en utilisant l'extension suivante du théorème de Donsker qui a été prouvée dans le cas $q = 2$ dans [7].

Proposition 4.2.3 Soit $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathcal{C}$, $|\Phi(x)| \leq C(1 + \|x\|_\infty^q)$. Lorsque $U_1 \in L^q(P)$,

$$\mathbb{E}_P[\Phi(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu[\Phi].$$

Preuve : Il nous suffit de démontrer l'uniforme intégrabilité des variables $\|X_n\|_\infty^q$. En utilisant [7], on montre que

$$A_{n,\alpha} = \mathbb{E}_P[\|X_n\|_\infty^q I_{\{\|X_n\|_\infty^q \geq \alpha\}}] \leq 2\alpha P\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geq \frac{\alpha^{\frac{1}{q}}}{2}\right) + 2\mathbb{E}_P\left[\left(2^q \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^q - \alpha\right)_+\right]$$

où $S_n = \sum_{j=1}^n U_j$. Soit N une variable aléatoire qui est, sous P , une gaussienne centrée et réduite. D'après le théorème de la limite centrale, on a

$$P\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geq \frac{\alpha^{\frac{1}{q}}}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha P\left(|N| \geq \frac{\alpha^{\frac{1}{q}}}{2}\right).$$

De plus, comme $U_1 \in L^q(P)$, le théorème de la limite centrale est valide pour la distance de Wasserstein d'ordre q (voir, par exemple, [15]). Ceci entraîne l'équi-intégrabilité des variables $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^q$ et donc

$$\mathbb{E}_P\left[\left(2^q \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^q - \alpha\right)_+\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P\left[(2^q N^q - \alpha)_+\right].$$

Ainsi,

$$\limsup_n A_{n,\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0. \square$$

En appliquant la proposition précédente à (4.14) on a le résultat suivant :

Proposition 4.2.4 Si $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par une multi-mesure et si le couple $(U_1, U_1^\#) \in L^{2p}(P) \times L^{2p}(P \otimes \hat{P})$, alors, $\phi_h(X_n)$ converge en loi de Dirichlet vers $\phi_h * S_{OU}$.

Remarque 10 : On se place dans le cadre de la section 2.3.1. Il est facile de voir, en utilisant la proposition 4.2.1 et la proposition 2.3.1, que $\phi_h(Y_n)$ converge dans \mathbb{D}_C vers $\phi_h(B)$. •

4.3 Extension du principe d'invariance de Lindeberg-Feller

Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, centrées et réduites. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ est un tableau triangulaire de nombres réels. Nous supposons que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- a) Il existe une fonction $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , croissante et nulle en zéro telle que, $\forall t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} a_{n,k}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a(t),$$

- b) Il existe une constante C telle que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $|a_{n,k}| \leq C$.

Soit Z_n le processus continu défini sur $[0, 1]$ de la manière suivante :

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} a_{n,k} U_k + (nt - [nt]) a_{n,[nt]+1} U_{[nt]+1} \right).$$

Le résultat suivant est classique ([10], p.226).

Proposition 4.3.1 *La suite de processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi dans \mathcal{C} vers un processus gaussien noté G_a , continu, centré, à accroissements indépendants et dont la fonction de covariance c est donnée par $c(s, t) = a(s \wedge t)$.*

Nous avons le lemme technique suivant qui est l'analogie du lemme 4.1.1 (avec $p = 2$).

Lemme 4.3.1 *Lorsque $h \in L^2([0, 1], dx)$, $t \in [0, 1]$,*

$$\widetilde{V}_n^h(t) = n \sum_{j=1}^{[nt]} a_{n,k} \left[\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} h(s) ds \right]^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t h^2(s) da(s).$$

Preuve : Nous supposons que h est continue, le cas général se traitant comme dans la preuve du lemme 4.1.1.

Pour $t \in [0, 1]$ fixé, on définit la mesure ν_n^t sur $[0, \frac{[nt]}{n}]^2$ par

$$d\nu_n^t = n \sum_{k=1}^{[nt]} a_{n,k} I_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}(s) I_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}(u) ds du$$

et nous étudions sa convergence étroite. On note $\psi_{\nu_n^t}$ la fonction caractéristique de ν_n^t et on a, en utilisant le théorème des accroissements finis, l'existence de réels $(u_{n,k}, s_{n,k}) \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]^2$ tels que

$$\psi_{\nu_n^t}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} a_{n,k} e^{i(xu_{n,k} + ys_{n,k})}.$$

Ainsi,

$$\left| \psi_{\nu_n^t}(x, y) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} a_{n,k} e^{i(x+y)\frac{k}{n}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Soit μ_n^t la mesure discrète sur $\{\frac{1}{n}, \dots, \frac{[nt]}{n}\}$ vérifiant, $\forall 1 \leq j \leq [nt]$, $\mu_n^t(\frac{j}{n}) = \frac{a_{n,j}}{n}$.
On montre, en utilisant la condition a), que

$$\mu_n^t([0, s]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a(s)I_{s \leq t} + a(t)I_{s > t}$$

et donc que

$$\psi_{\nu_n^t}(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t e^{is(x+y)} da(s).$$

Ainsi, en appliquant le résultat de convergence précédent à la fonction $g : (s, u) \in [0, 1]^2 \mapsto h(s)h(u)$ qui est continue et bornée,

$$n \sum_{k=1}^{[nt]} a_{n,k} \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) ds \right]^2 = \mathbb{E}_{\nu_n^t}[g] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t h^2(s) da(s). \quad (4.15)$$

Le résultat est prouvé. \square

On démontre alors aisément, en utilisant le lemme précédent et en reprenant les démonstrations pas à pas, que les résultats des sections 4.1 et 4.2 subsistent en remplaçant X_n par Z_n et S_{OU} par $S_{OU}^{\sqrt{a'}}$.

Bibliographie

- [1] E. Alòs, O. Mazet and D. Nualart, Stochastic calculus with respect to Gaussian processes, *Ann. Probab.* **29** (2001), no. 2, 766–801.
- [2] X. Bardina and M. Jolis, Weak convergence to the multiple Stratonovich integral, *Stochastic Process. Appl.* **90** (2000), no. 2, 277–300
- [3] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Second edition, Wiley, New York, 1999.
- [4] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter, Berlin, 1991.
- [5] N. Bouleau, *Error calculus for finance and physics : the language of Dirichlet forms*, de Gruyter, Berlin, 2003.
- [6] N. Bouleau and C. Chorro, Error structures and parameter estimation, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), no. 4, 305–310.
- [7] N. Bouleau, Théorème de Donsker et formes de Dirichlet, *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), no. 5, 369–380.
- [8] C. Chorro, Convergence in Dirichlet law of certain stochastic integrals, *Electron. J. Probab.* **10** (2005), 1005-1025.
- [9] R. Delgado and M. Jolis, Weak approximation for a class of Gaussian processes, *J. Appl. Probab.* **37** (2000), no. 2, 400–407.
- [10] D. Dacunha-Castelle and M. Duflo, *Probabilités et statistiques 2*, Masson, 1993.
- [11] M. D. Donsker, An invariance principle for certain probability limit theorems, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **1951** (1951), no. 6, 12 pp.
- [12] M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [13] J. Jacod and A. N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, Springer, Berlin, 1987.
- [14] A. Jakubowski, J. Mémin and G. Pagès, Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace \mathbf{D}^1 de Skorokhod, *Probab. Theory Related Fields* **81** (1989), no. 1, 111–137.

- [15] O. Jonhson, R. Samworth, Central limit theorem and convergence to stable laws in Mallows distance (2004), Preprint.
- [16] T. G. Kurtz and P. Protter, Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations, *Ann. Probab.* **19** (1991), no. 3, 1035–1070.
- [17] Z. M. Ma and M. Röckner, *Introduction to the theory of (nonsymmetric) Dirichlet forms*, Springer, Berlin, 1992.
- [18] D. Nualart, *The Malliavin calculus and related topics*, Springer, New York, 1995.
- [19] D. Nualart and M. Zakai, Multiple Wiener-Itô integrals possessing a continuous extension, *Probab. Theory Related Fields* **85** (1990), no. 1, 131–145.
- [20] A. W. van der Vaart and J. A. Wellner, *Weak convergence and empirical processes*, Springer, New York, 1996.

Chapitre 5

Commentaires et perspectives

Nous proposons, dans ce chapitre, plusieurs pistes de développement qui seront explorées dans le futur ainsi que quelques considérations heuristiques concernant les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse.

5.1 Information de Fisher et dimension infinie

Nous avons obtenu dans le chapitre 1 de cette thèse des liens robustes entre le calcul d'erreur par formes de Dirichlet et les statistiques paramétriques via la notion d'information de Fisher. Une question naturelle est de savoir si un rapprochement analogue est possible dans le cas des statistiques non paramétriques, notamment en ce qui concerne l'estimation de type fonctionnelle. Cette question est d'autant plus intéressante qu'une réponse positive pourrait constituer un pont fondamental entre le chapitre 1 et les chapitres 3 et 4. Malheureusement, la notion d'information de Fisher ne possède pas, à notre connaissance, d'extension suffisamment souple techniquement pour permettre d'aborder ce problème de front. Nous allons montrer cependant que quelques remarques élémentaires permettent de considérer qu'une des pistes les plus sérieuses dans ce domaine est l'étude de l'expérience gaussienne de shift sur l'espace de Wiener.

Considérons $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une base orthonormée de $L^2([0, 1])$. On note B le mouvement brownien standard sur l'espace de Wiener $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on considère le modèle paramétrique $(P_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}^N}$ où, $\forall \theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{R}^N$, P_θ est la loi du processus continu sur $[0, 1]$

$$B. + \underbrace{\sum_{k=1}^N \theta_k \int_0^\cdot \chi_k(s) ds}_{H_N}.$$

En vertu du théorème de Girsanov, le modèle (P_θ) est dominé par μ avec

$$\frac{dP_\theta}{d\mu} = e^{-\int_0^1 h_N(s)dBs - \frac{1}{2} \int_0^1 h_N^2(s)ds}$$

où $h_N = \sum_{k=1}^N \theta_k \chi_k$. Il est facile de voir que le modèle (P_θ) est régulier et que l'information de Fisher correspondante vérifie, $\forall \theta \in \mathbb{R}^N$,

$$J(\theta) = Id.$$

Si l'on équipe l'espace des paramètres \mathbb{R}^N d'une mesure gaussienne centrée de matrice de covariance égale à la matrice identité, on obtient, en effectuant l'identification fondamentale, que la structure d'erreur associée n'est autre que la structure d'erreur d'Ornstein Uhlenbeck sur \mathbb{R}^N .

Pour le passage à la dimension infinie, il semble alors naturel d'étudier le modèle $(P_h)_{h \in L^2([0,1])}$ où P_h est la loi du processus $B + \int_0^\cdot h(s)ds$ et vérifie donc par Girsanov

$$\frac{dP_h}{d\mu} = e^{-\int_0^1 h(s)dBs - \frac{1}{2} \int_0^1 h^2(s)ds}.$$

Dans le cadre de la section 3 du chapitre 1 (dont nous reprenons ici les notations), nous avons pu observer que, lorsque $F : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière, $\Gamma^V[F]$ peut être vu comme la borne optimale dans l'étude du risque quadratique asymptotique. En effet, en notant $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ l'estimateur du maximum de vraisemblance, on obtient, sous les hypothèses de la proposition 1.3.2,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[n(F(\hat{\theta}_n) - F(\theta))^2 \mid V = \theta] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{F'^2(\theta)}{J(\theta)} = \Gamma^V[F](\theta).$$

De plus, si $(T_n(X_1, \dots, X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs réguliers construits à l'aide d'observations indépendantes et de biais asymptotique égal à F i.e

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[T_n(X_1, \dots, X_n) \mid V = \theta] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(\theta),$$

on a, d'après l'inégalité de Cramer-Rao,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[n(T_n((X_1, \dots, X_n)) - F(\theta))^2 \mid V = \theta] \geq \frac{F'^2(\theta)}{J(\theta)} = \Gamma^V[F](\theta).$$

Dans ce cas, l'estimateur du maximum de vraisemblance est dit Fisher-efficace car il réalise de manière asymptotique l'égalité dans l'inégalité de Cramer Rao.

Dans un travail récent ([3]), Janssen propose l'analogue non-paramétrique de la notion de Fisher-efficacité. Bien qu'un peu technique, ce cadre formel semble adapté pour l'étude du modèle $(P_h)_{h \in L^2([0,1])}$ défini ci-dessus et constitue donc une piste d'étude intéressante pour le passage à la dimension infinie.

5.2 Le cas des équations différentielles stochastiques

On se place ici dans le cadre du chapitre 4. La convergence en loi de Dirichlet d'une large famille d'intégrales du processus

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1} \right)$$

vers les intégrales de Stratonovich correspondantes pose naturellement la question de l'extension au cas des solutions de certaines équations différentielles stochastiques.

Soient $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions suffisamment régulières pour que le processus de diffusion $(Y_t)_{t \in [0,1]}$, solution de l'équation différentielle stochastique au sens Stratonovich

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t) \diamond dB_t,$$

existe. Nous savons que, sous des hypothèses assez larges ([1], chap.4), $Y \in (\mathbb{D}_{OU})_{\mathcal{C}}$, ainsi, la structure Y_*S_{OU} est bien définie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$, on note $Y_n(t)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$dY_n(t) = b(Y_n(t)) + \sigma(Y_n(t))dX_n(t). \quad (5.1)$$

La convergence en loi dans \mathcal{C} de la suite de processus continus $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers Y est traitée dans [2] en utilisant le cadre général proposé par Strook et Varadhan. Pour ce qui est de l'étude de la convergence en loi de Dirichlet de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers Y_*S_{OU} , plusieurs problèmes techniques, dus à l'apparition de phénomènes de non linéarité, se posent. En effet, les processus étudiés dans le chapitre 4 de cette thèse sont multi-linéaires en les U_k ce qui rend le calcul et l'étude de l'opérateur de dérivation associé relativement simples. Cela n'est plus le cas ici (équation 5.1). Cependant, on peut raisonnablement envisager qu'une telle convergence ait lieu en imposant une condition de type $(U_k, U_k^\#) \in \bigcap_{p \geq 2} L^p(P) \times L^p(P \otimes \widehat{P})$.

5.3 “Perturbations verticales” et théorèmes limites

Les résultats de convergence en loi de Dirichlet obtenus dans la section 2.3 et dans le chapitre 4 mettent en lumière l'importance de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck S_{OU} sur l'espace de Wiener. Nous allons montrer, dans cette partie, que quelques considérations géométriques élémentaires permettent

de donner à ces résultats une interprétation intuitive.

Considérons la structure d'erreur

$$S_{OU} = (\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu, \mathbb{D}_{OU}, \Gamma_{OU}).$$

Nous pouvons associer de manière unique à S_{OU} un semi-groupe d'opérateurs symétriques sous-markoviens $(P_t)_{t \geq 0}$ sur $L^2(\mu)$ ([1], chap.1). En vertu de la formule de Melher ([1], p.86), nous avons $\forall f \in L^2(\mu), \forall w \in \mathcal{C}$,

$$P_t[f](w) = \int_{\widehat{\mathcal{C}}} f \left(e^{\frac{t}{2}} w + (1 - e^t)^{\frac{1}{2}} \widehat{w} \right) d\widehat{\mu}(\widehat{w}) \quad (5.2)$$

où $\widehat{\mu}$ est la mesure de Wiener associée à une copie $\widehat{\mathcal{C}}$ de l'espace de Wiener initial.

On montre alors classiquement que

$$\mathbb{D}_{OU} = \left\{ f \in L^2(\mu); \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_\mu[(f - P_t[f])f] < \infty \right\}$$

avec, lorsque $f \in \mathbb{D}_{OU}$,

$$\mathcal{E}_{OU}[f] = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_\mu[(f - P_t[f])f].$$

De cette manière, la structure d'erreur S_{OU} est liée à la perturbation suivante de la trajectoire brownienne :

$$w \mapsto e^{\frac{t}{2}} w + (1 - e^t)^{\frac{1}{2}} \widehat{w}$$

où \widehat{w} est un mouvement brownien standard indépendant de w et t un paramètre infinitésimal. En d'autres termes, lorsque $t \downarrow 0$, la trajectoire brownienne initiale est perturbée verticalement par une trajectoire brownienne indépendante.

Considérons maintenant les processus

$$Y_n(t) = \sum_{k=0}^n g_k \int_0^t \chi_k(s) ds$$

et

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1} \right)$$

dont on a démontré, sous des hypothèses d'équi-distribution et d'indépendance, la convergence en loi de Dirichlet vers S_{OU} . Les g_k (resp. les U_k) étant supposées

Dirichlet indépendantes et de même \mathbb{D} -loi, on peut considérer de manière heuristique que les erreurs associées notées e_k sont i.i.d, ainsi, la trajectoire initiale du processus Y_n (resp. X_n) est perturbée verticalement par celle du processus

$$\sum_{k=0}^n e_k \int_0^t \chi_k(s) ds \quad \left(\text{resp. } \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} e_k + (nt - [nt])e_{[nt]+1} \right) \right)$$

dont la forme est identique à Y_n (resp. X_n).

Ainsi, on peut expliquer partiellement et de manière intuitive les résultats obtenus.

Considérons, à présent, l'exemple 8 de l'introduction où la convergence en loi de Dirichlet d'une intégrale de la fonction de répartition empirique

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{\{U_j \leq t\}}$$

est étudiée. Nous avons démontré que, dans ce cas, la structure limite n'est pas liée à la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck mais à une structure de type Melher généralisé. Au vue des considérations précédentes, la conclusion n'est pas surprenante, en effet, une perturbation des U_k entraîne ici une perturbation longitudinale (et non verticale) de la trajectoire du processus F_n . Ce petit exemple présente donc, dans le cadre de cette thèse, un caractère singulier qu'il conviendra d'examiner plus en détails en proposant, par exemple, une extension fonctionnelle du résultat obtenu.

Enfin, l'extension des résultats du chapitre 4, lorsque les hypothèses d'indépendance et d'équi-distribution sont relaxées, constitue une piste de travail intéressante.

Bibliographie

- [1] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter, Berlin, 1991.
- [2] L. Caramellino, A. Climescu-Haulica and B. Pacchiarotti, Diffusion approximation for random walks on nilpotent Lie groups, *Statistics and probability letters* **41** (1999), 363-377.
- [3] A. Janssen, A nonparametric Cramer-Rao inequality for estimators of statistical functionals, *Statistics and probability letters* **64** (2003), 347-358.

Résumé : Le choix d'un langage pertinent pour traiter des erreurs est un sujet ancien. Récemment, Nicolas Bouleau a proposé une approche originale basée sur la puissante théorie mathématique des formes de Dirichlet. En effet, les principaux opérateurs utilisés en théorie du potentiel (opérateur carré du champ, générateur infinitésimal) vérifient un calcul fonctionnel qui s'interprète en termes de propagation d'erreurs. Cette approche, qui est notre cadre théorique, reprend plusieurs idées essentielles présentes dans les travaux pionniers de Gauss et s'adapte parfaitement aux situations rencontrées en modélisation physique et financière. L'objectif principal de cette thèse a été de relier solidement le calcul d'erreur par les formes de Dirichlet à l'expérience. Deux voies complémentaires ont été abordées. Nous avons, dans un premier temps, exploré la connexion avec les statistiques paramétriques via la notion d'information de Fisher mettant ainsi en évidence une forte compatibilité entre les propriétés analytiques de la matrice d'information de Fisher et les opérations algébriques élémentaires liées au calcul d'erreur. Cette étude a été complétée par l'extension en termes de forme de Dirichlet de certains théorèmes limites fonctionnels de la théorie des probabilités (théorème de la limite centrale hilbertien, théorème de Donsker). De la même manière que l'utilisation de la loi normale en statistique s'explique en partie par le théorème de la limite centrale, nous avons mis en évidence l'importance d'une famille de structures d'erreur par des arguments asymptotiques. En particulier, sur l'espace de Wiener, les résultats obtenus donnent une interprétation originale du calcul de Malliavin comme objet limite.

Mots-clés : Formes de Dirichlet, opérateur carré du champ, domaine vectoriel, erreurs, information de Fisher, théorèmes limites.