THÉORÈME DE DONSKER
et
FORMES DE DIRICHLET

Christophe Chorro (Université Paris 1, Enpc)

6 Septembre 2005

I_1 : Notion intuitive de structure d'erreur

Soit C une grandeur physique connue grâce à des mesures dont le résultat est entaché d'une erreur que l'on notera $\triangle C$.

Ces grandeurs mal connues seront supposées aléatoires (en général corrélées).

• Approche probabiliste :

Il faut connaître la loi du couple $(C, \triangle C)$:

Calcul de propagation $\Leftrightarrow$ Calcul de lois image

• Approche mixte :

H$_1$ **:** On suppose $var[\triangle C \mid C]$ connue et $\mathbb{E}[\triangle C \mid C] = 0$.

H$_2$ **:** **Erreurs petites :** $\triangle C = \varepsilon Y$ (Y bornée, ε paramètre de calibration).

Le problème de la propagation se simplifie.

Soient $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de classe C^3 avec des dérivées bornées. On pose

$$\mathbf{b_0 = 0} \quad \sigma_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} \mathbf{= var[\triangle C \mid C]}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{b_n = \mathbb{E}[\triangle g_n(C) \mid C]} \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathbf{n}}^{\mathbf{2}} \mathbf{= var[\triangle g_n(C) \mid C]}$$

où $g_n = f_n o \ldots o f_1$. On note $x_n = g_n(C)$

$$\boxed{\begin{gathered} \sigma_{\mathbf{n}}^{\mathbf{2}} \mathbf{= (f'_n)^2[x_{n-1}]}\ \sigma_{\mathbf{n-1}}^{\mathbf{2}} + \varepsilon^{\mathbf{3}}\ \mathbf{0(1)} \\ \\ \mathbf{b_n = f'_n[x_{n-1}]\ \ b_{n-1} + \frac{1}{2}\ \ f''_n[x_{n-1}]}\ \ \sigma_{\mathbf{n-1}}^{\mathbf{2}} + \varepsilon^{\mathbf{3}}\ \ \mathbf{0(1).} \end{gathered}}$$

Le calcul de variance est un calcul du premier ordre ne faisant intervenir que les variances. Le calcul de biais est un calcul du second ordre faisant intervenir variances et biais.

• Définition heuristique

Sur l'espace $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), loi\ de\ C)$, on peut alors introduire l'opérateur Γ^C, appelé opérateur d'erreur quadratique, défini par

$$\Gamma^C[f](x) = \underset{\varepsilon \to 0}{Lim} \frac{var[\triangle f(C) \mid C = x]}{\varepsilon^2}.$$

Γ^C se polarise en un opérateur symétrique, positif, bilinéaire vérifiant le calcul fonctionnel suivant : si $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ avec des dérivées partielles bornées

$$\Gamma^C[F(f,g)] = (F_1')^2(f,g)\Gamma^C[f] + (F_2')^2(f,g)\Gamma^C[g] + 2F_1'(f,g)F_2'(f,g)\Gamma^C[f,g].$$

Propagation "à la Gauss" (1821)

Le terme $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \mathrm{loi\ de\ C}, \Gamma^{\mathrm{C}})$ **est appelé une structure d'erreur**.

I_2 : Le langage des formes de Dirichlet

Dorénavant une structure d'erreur sera un terme $(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ où $(W, \mathcal{W}, m)$ est un espace de probabilité et Γ un opérateur bilinéaire, symétrique, positif de domaine $\mathbb{D}$ dense dans $L^2(m)$, à valeurs dans $L^1(m)$ et vérifiant :

1) Le calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$:
soient $U = (U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{D}^n$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap Lip$ alors $F(U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{D}$ et

$$\Gamma[F(U_1, \ldots, U_n)] = \sum_{i,j=1}^{n} F'_i(U) F'_j(U) \Gamma[U_i, U_j]$$

avec $\Gamma[V] := \Gamma[V, V]$ (V dans $\mathbb{D}$).

2) $1 \in \mathbb{D}$, $\Gamma[1] = 0$.

3) La forme bilinéaire définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ par

$$\mathcal{E}[F, G] = \frac{1}{2} \int_W \Gamma[F, G] dm$$

est **fermée** au sens où $\mathbb{D}$ muni de la norme du graphe notée

$$\| \, . \, \|_{\mathbb{D}} = (\| \, . \, \|^2_{L^2(m)} + \mathcal{E}[.])^{\frac{1}{2}}$$

est complet.

AVANTAGES

• **Extension naturelle** de l'approche heuristique (propriété 1)

• **Souplesse technique** (Image, produits)

• La propriété (3) assure un calcul fonctionnel sur les fonctions Lip avec, lorsque F est contractante,

$$\Gamma[F(U)] \leq \Gamma[U].$$

• **Possibilité d'un calcul de biais** : on peut associer de manière unique à $\mathcal{E}$ un opérateur auto-adjoint A de domaine $D(A) \subset \mathbb{D}$ tel que

$$A[F(U)] = F'(U)A[U] + \frac{1}{2}F''(U)\Gamma[U]$$

lorsque $U \in D(A)$, $\Gamma[U] \in L^2(m)$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 avec des dérivées bornées.

I_3 : Image et Produits infinis

Remarque : *Si U est définie sur $(W, \mathcal{W}, m)$ la loi image $U_* m$ est définie par*

$$\mathbb{E}_{U_* m}[F] = \mathbb{E}_m[F(U)].$$

• Structure image

Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur et $U \in \mathbb{D}^d$. La forme bilinéaire

$$(C^1(\mathbb{R}^d) \cap Lip, (F, G) \mapsto \mathcal{E}[F(U), G(U)])$$

est fermable.

Sa plus petite extension fermée $(\mathbb{D}_U, \mathcal{E}_U)$ est une forme de Dirichlet locale ayant un opérateur carré du champ noté Γ_U.

La structure d'erreur

$$U_* S = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_* m, \mathbb{D}_U, \Gamma_U)$$

est appelée **l'image de S par U** ou la **$\mathbb{D}$-loi de U**.

• Produits infinis

Soit $S_n = (W_n, \mathcal{W}_n, m_n, \mathbb{D}_n, \Gamma_n)$, $n \geq 0$, une famille de structures d'erreur. La structure produit

$$(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma) = \prod_{n=0}^{\infty} S_n$$

est définie par $(W, \mathcal{W}, m) = (\prod_{n=0}^{\infty} W_n, \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n, \otimes_{n=0}^{\infty} m_n)$ avec un domaine explicite $\mathbb{D}$ et $\forall F \in \mathbb{D}$,

$$\Gamma[F] = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n[F].$$

Application : Deux variables aléatoires $U_1 \in \mathbb{D}^p$ et $U_2 \in \mathbb{D}^m$ sont dites $\mathbb{D}$-indépendantes ssi

$$(U_1)_* S \otimes (U_2)_* S = (U_1, U_2)_* S.$$

C'est le cas des applications coordonnées d'une structure produit.

I_4 : Exemples de structures d'erreur

• **Sur $\mathbb{R}$ on les connaît bien (Théorème de Hamza)**

Structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m = \mathcal{N}(0,1), H^1(m), u \mapsto (u')^2).$$

• **Sur l'espace de Wiener**

La structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener $\mathcal{C} = (C_0([0,1], \mathbb{R}), \|\|_\infty)$ équipé de la mesure de Wiener μ :

$$S_{OU} = (\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu, \mathbb{D}_{OU}, \Gamma_{OU})$$

avec pour $F = f(\lambda_1, .., \lambda_n)$ cylindrique régulière,

$$\Gamma_{OU}[F] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ < \lambda_i, \lambda_j >_{L^2([0,1],dx)} .$$

I_5 Problème de l'identification

Comment obtenir concrètement des structures d'erreur associées à l'observation d'un phénomène ?

• **En dimension finie :** Les structures d'erreur sont solidement reliées aux statistiques paramétriques via la notion **d'information de Fisher**.

Cf : *N.Bouleau et Ch.Chorro, "Error structure and parameter estimation", note C.R.A.S, Février 2004.*

• **En dimension infinie** qui est typiquement le cadre de la finance mathématique (Espace de Wiener), d'autres techniques doivent être mises en place : **Raffinement des théorèmes probabilistes :**

-Théorème de la limite centrale dans les espaces de Hilbert
-**Principe d'invariance de Donsker**
-Approximation du mouvement brownien par des séries de Fourier aléatoires

Le deuxième point pose un problème technique :

Donner une extension de la définition du domaine d'une forme de Dirichlet pour des variables à valeurs dans un espace de dimension infinie.

II Domaine vectoriel d'une forme de Dirichle

A] L'hypothèse (G), l'opérateur de dérivation

a) L'hypothèse (G)

On dira qu'une structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ vérifie la propriété (G) ssi il existe un espace de Hilbert séparable $(\mathcal{H}, \|\|_{\mathcal{H}})$ et un opérateur ∇ de $\mathbb{D}$ dans $L^2(m; \mathcal{H})$ tels que

$$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{D} \qquad \| \nabla \mathbf{X} \|_{\mathcal{H}}^{2} = \mathbf{\Gamma}[\mathbf{X}].$$

Remarque : L'hypothèse est peu restrictive (Mokobovski).

b) L'opérateur de dérivation

Soient $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{m})$ une copie de $(W, \mathcal{W}, m)$ et J une isométrie entre $\mathcal{H}$ et $L^2((\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{m}))$ telle que $\forall h \in \mathcal{H}$, $\mathbb{E}_{\widehat{m}}[J(h)] = 0$, on définit l'opérateur de dérivation en posant $\forall U \in \mathbb{D}$,

$$\mathbf{U}^{\#} = \mathbf{J}(\nabla \mathbf{U}) \in \mathbf{L}^{\mathbf{2}}(\mathbf{m} \otimes \hat{\mathbf{m}}).$$

c) Un exemple

La structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener S_{OU} vérifie l'hypothèse (G) avec $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ et

$$\nabla_{\mathbf{OU}}\left[\int_0^1 \mathbf{h(s)dB_s}\right] = \mathbf{h}, \quad \forall\ \mathbf{h} \in \mathcal{H}.$$

De plus si l'on note $(\hat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{B}(\mathcal{C})}, \hat{\mu})$ une copie de $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu)$ et $(\hat{B}_t)_{t\in[0,1]}$ le Brownien associé, un opérateur de dérivation est donné par

$$\left(\int_0^1 \mathbf{h(s)dB_s}\right)^{\#_{\mathrm{OU}}} = \int_0^1 \mathbf{h(s)d\hat{B}_s}.$$

B] Le domaine vectoriel

Soit B un espace de Banach qui possède une base de Schauder. Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur qui vérifie la propriété (G).

But : Étendre la notion de domaine aux variables à valeurs dans B.

Définition :(Feyel-La Pradelle) On note $\mathbb{D}_B$ l'espace vectoriel des variables U de $L^2(m; B)$ telles qu'il existe g dans $L^2(m \otimes \hat{m}; B)$ avec

$$\forall \lambda \in B', \ < \lambda, U > \in \mathbb{D} \quad et \quad < \lambda, U >^{\#} = < \lambda, g > .$$

On pose alors $g = U^{\#}$ et on équipe $\mathbb{D}_B$ de la norme

$$\| U \|_{\mathbb{D}_B} = \left(\| U \|^2_{L^2(m;B)} + \frac{1}{2} \| U^{\#} \|^2_{L^2(m \times \hat{m};B)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

(Ainsi $\mathbb{D}_{\mathbb{R}} = \mathbb{D}$).

Certaines propriétés du domaine vont s'étendre au domaine vectoriel.

1) **Le calcul fonctionnel**

Proposition : Soit F une fonction Lipschitzienne de B dans $\mathbb{R}$.
a) Si $U \in \mathbb{D}_B$,

$$F(U) \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad \Gamma[F(U)] \leq K^2 \mathbb{E}_{\widehat{m}}[\| U^{\#} \|_B^2].$$

b) De plus si F est de classe C^1,

$$F(U)^{\#} = < F'(U), U^{\#} > . \quad (*)$$

Remarque : Si $B = \mathbb{R}^p$

$$(*) \Leftrightarrow F(U)^{\#} = \sum_{i=1}^{p} F_i'(U) U_i^{\#}$$

2) **Image d'une structure d'erreur par un élément du domaine vectoriel**

Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur et $U \in \mathbb{D}_B$. La forme bilinéaire

$$(C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip, (F, G) \mapsto \mathcal{E}[F(U), G(U)])$$

est fermable.

Sa plus petite extension fermée $(\mathbb{D}_U, \mathcal{E}_U)$ est une forme de Dirichlet locale ayant un opérateur carré du champ noté Γ_U.

La structure d'erreur

$$U_* S = (B, \mathcal{B}(B), U_* m, \mathbb{D}_U, \Gamma_U)$$

est appelée **l'image de $\mathbf{S}$ par $\mathbf{U}$ ou la $\mathbb{D}$-loi de $\mathbf{U}$**.

Exemple :

$$\boxed{\textbf{Les solutions d'EDS régulières sont dans } (\mathbb{D}_{\mathrm{OU}})_{\mathcal{C}}\textbf{.}}$$

En particulier si $h \in L^2([0,1])$,

$$\int_0^{\cdot} h(s)dB_s \in (\mathbb{D}_{OU})_{\mathcal{C}} \quad et \quad \left(\int_0^{\cdot} h(s)dB_s\right)^{\#} = \int_0^{\cdot} h(s)d\widehat{B}_s.$$

On note

$$S_{OU}^h = (\int_0^{\cdot} h(s)dB_s)_* S_{OU}$$

la structure dont la forme de Dirichlet $\mathcal{E}_{OU}^h$ vérifie $\forall F \in C^1(\mathcal{C},\mathbb{R}) \cap Lip$

$$\mathcal{E}_{OU}^h[F] = \mathcal{E}_{OU}\left[F\left(\int_0^{\cdot} h(s)dB_s\right)\right] = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{C}}\left\langle F'\left(\int_0^{\cdot} h(s)dB_s\right), \int_0^{\cdot} h(s)d\widehat{B}_s\right\rangle^2 d\mu d\widehat{\mu}.$$

C] Convergence en $\mathbb{D}$-loi

Définition : On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}_B$ converge en $\mathbb{D}$-loi si il existe une structure d'erreur $\tilde{S} = (B, \mathcal{B}(B), P, \tilde{\mathbb{D}}, \tilde{\Gamma})$ telle que :

i) $(U_n)_* m \to P$ en loi dans B,

ii) $C^1(B,\mathbb{R}) \cap Lip \subset \tilde{\mathbb{D}}$ et $\forall F \in C^1(B,\mathbb{R}) \cap Lip$, $\mathcal{E}[F(U_n)] \to \tilde{\mathcal{E}}[F]$.

• **Pour démontrer la convergence en loi de Dirichlet d'une suite** $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}_B$ **trois points sont à vérifier :**

$$\begin{cases} \text{–Étudier la convergence en loi de la suite } (U_n) \text{ vers } P \\ \\ -\forall F \in C^1(B,\mathbb{R}) \cap Lip, \text{ étudier la convergence de la suite } \mathcal{E}[F(U_n)] \\ \text{vers une limite notée } \tilde{\mathcal{E}}[F] \\ \\ \text{–Étudier la fermabilité de la pré-structure obtenue} \end{cases}$$

• **Cette notion est stable par les fonctions** C^1 **et Lip.**

III Extensions du théorème de Donsker

Rappel : Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d définies sur un espace $(W, \mathcal{W}, P)$, centrées et réduites. On note $\forall t \in [0,1]$

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1}\right)$$

Le principe d'invariance de Donsker assure la converge en loi dans $\mathcal{C}$ de (X_n) vers la mesure de Wiener

On suppose ici que les U_k sont erronées (les erreurs étant modélisées par des structures d'erreur) en imposant une condition d'indépendance et d'équi-distribution pour les erreurs.

En d'autres termes : **les $\mathrm{U_k}$ sont les coordonnées de la structure produit**

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda, d, \gamma)^{\mathbb{N}^*} = s^{\mathbb{N}^*}.$$

La structure $s = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda, d, \gamma)$ vérifiant $i \in d$, $\mathbb{E}_\lambda[i] = 0$, $\mathbb{E}_\lambda[i^2] = 1$ et $e[i] = 1$.

Ainsi les U_k sont des variables $\mathbf{i.i.d}$ sur W de loi λ (**centrées, réduites**) telles que $\mathbf{U_k} \in \mathbb{D}$.

Les U_k sont $\mathbb{D}$-indépendantes de même $\mathbb{D}$-loi.

HYP : La structure s **vérifie la propriété (G)** et on note $'$ un opérateur de dérivation associé construit avec une copie $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathcal{B}(\mathbb{R})}, \widehat{\lambda})$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

On déduit classiquement un opérateur de dérivation $\#$ sur S en posant $\forall p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{U_1}, \ldots, \mathbf{U_p})^{\#} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{p}} \mathbf{F'_k}(\mathbf{U_1}, \ldots, \mathbf{U_p}) \; \mathbf{i'}(\mathbf{U_k}, \widehat{\mathbf{U_k}}),$$

les $(\widehat{U_k})$ étant les applications coordonnées de l'espace $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P}) = (\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathcal{B}(\mathbb{R})}, \widehat{\lambda})^{\mathbb{N}^*}$

On a alors le résultat naturel suivant (N. Bouleau : *Théorème de Donsker et formes de Dirichlet*, Bull. Sci. Math. 129, no. 5, 369-380, 2005.)

Proposition : La suite de processus continus $(\mathrm{X_n})$ converge en loi de Dirichlet vers $\mathrm{S_{OU}}$

Preuve : Extension purement probabiliste du théorème de Donsker.

Nous allons étendre ce résultat à certaines familles d'intégrales stochastiques :

$$\begin{cases} \textbf{A]} \quad \int_0^{\cdot} \mathrm{h(s)dX_n(s)}, \ \mathrm{h} \in \mathrm{L^2([0,1])} \\ \\ \textbf{B]} \quad \int_0^{\cdot} \mathrm{K(s,.)dX_n(s)}, \ \mathrm{K} \ \textbf{régulier} \\ \\ \textbf{C]} \quad \int_{[0,.]^p} \mathrm{h(x_1,\ldots,x_p)dX_n(x_1)\ldots dX_n(x_p)}, \ \mathrm{h} \ \textbf{donnée par une multi-mesure} \end{cases}$$

(C. Chorro : *Convergence in Dirichlet law of certain stochastic integrals*, Electron. J. Probab. 10, 1005-1025, 2005.)

A] Convergence en loi de Dirichlet de $\int_0^{\cdot} \mathbf{h(s)dX_n(s)}$

Soit $h \in L^2([0,1])$, on note

$$Y_n^h(t) = \int_0^t h(s)dX_n(s) = \sqrt{n}\sum_{k=1}^{n} U_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s)I_{[0,t]}(s)ds.$$

$\boxed{\textbf{Proposition : La suite de processus continus } (Y_n^h) \textbf{ converge en loi de Dirichlet vers } S_{OU}^h = (\int_0^{\cdot} h(s)dB_s)_* S_{OU}}$

Preuve :

a) Convergence en loi dans $\mathcal{C}$

X_n étant une semi-martingale continue deux conditions existent dans la littérature en fonction de la régularité de h

- Si h est càd-làg, **condition U.T** de Jakubowski, Mémin et Pagès.
- Si h quelconque, convergence de X_n vers $B.$ pour la distance en variations.

Bien que très simple notre problème sort de ce cadre $\Rightarrow$ Étude directe

On suppose h continue puis on raisonne par approximation dans $L^2([0,1])$.

On définit

$$\widetilde{Y_n^h}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} h\left(\frac{k}{n}\right) U_k + (nt - [nt]) h\left(\frac{[nt]+1}{n}\right) U_{[nt]+1} \right).$$

On a $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(\|\widetilde{Y_n^h} - Y_n^h\|_\infty > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La convergence en loi de $\widetilde{Y_n^h}$ vers $Y^h = \int_0^{\cdot} h(s)dB_s$ est une conséquence du principe d'invariance fonctionnel de **Lindeberg-Feller** (*D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, Probabilités et statistiques 2*).

Remarque : Si l'on prend $h = I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ on a $\widetilde{Y_n^h} = 0$ et $Y_n^h = X_n$.

Pour $h \in L^2([0,1])$, soit g une fonction continue telle que $\|h-g\|_{L^2([0,1])} \leq \varepsilon$ et $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne et bornée.

$$\mathbb{E}[\Phi(Y_n^h) - \Phi(Y^h)] = \underbrace{\mathbb{E}[\Phi(Y_n^h) - \Phi(Y_n^g)]}_{(1)} + \underbrace{\mathbb{E}[\Phi(Y_n^g) - \Phi(Y^g)]}_{(2)} + \underbrace{\mathbb{E}[\Phi(Y^g) - \Phi(Y^h)]}_{(3)}.$$

(3) : **Inégalité de Doob**

(1) : **Monotonie par morceaux de** $Y_n^{(h-g)_+}$ **et** $Y_n^{(h-g)_-}$ $\bigoplus$ **inégalité de Doob**.

(2) : **Résultat précédent.**

Remarque : Le résultat de convergence précédent se généralise pour des variables (U_k) à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

b) Étude de la suite $\mathcal{E}[F(Y_n^h)]$

Le processus Y_n^h est dans $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ avec

$$(Y_n^h)^{\#}(t) = \sqrt{n}\sum_{k=1}^{n} U_k^{\#}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s)I_{[0,t]}(s)ds.$$

Ainsi, le calcul fonctionnel généralisé donne pour $F \in C^1(\mathcal{C},\mathbb{R})\cap Lip$,

$$\mathcal{E}[F(Y_n^h)] = \frac{1}{2}\int_W\int_{\widehat{W}} < F'(Y_n^h),(Y_n^h)^{\#} >^2 d\widehat{P}dP = \frac{1}{2}\int_W\int_{\widehat{W}}\phi\left(Y_n^h,(Y_n^h)^{\#}\right)d\widehat{P}dP$$

où ϕ est **continue et sous quadratique.**

Les $(U_k, (U_k)^{\#})$ étant par construction une suite de variables $i.i.d$, centrées et de matrice de covariance $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$(Y_n^h, (Y_n^h)^{\#}) \underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} (\int_0^{\cdot} h(s)dB_s, \int_0^{\cdot} h(s)d\widehat{B}_s).$$

<u>Si</u> la convergence en loi précédente s'étend aux fonctions continues sous quadratiques on a

$$\mathcal{E}[F(Y_n^h)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{C}} \left\langle F'\left(\int_0^{\cdot} h(s)dB_s\right), \int_0^{\cdot} h(s)d\hat{B}_s \right\rangle^2 d\mu d\hat{\mu} = \mathcal{E}_{OU}^h[F]$$

où $\mathcal{E}_{OU}^h$ est la forme associée à la structure d'erreur $S_{OU}^h = (\int_0^{\cdot} h(s)dB_s)_* S_{OU}$.

Proposition : Soit $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathcal{C}$, $|\phi(x)| \leq K(1 + \|x\|_\infty^2)$ on a

$$\mathbb{E}_P[\phi(Y_n^h)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_\mu[\phi(Y^h)].$$

Preuve : Il suffit de montrer **l'équi-intégrabilité** des variables $\|Y_n^h\|_\infty^2$. On suppose $h \geq 0$, on s'intéresse à la quantité

$$A_{n,\alpha} = \mathbb{E}_P[\|Y_n^h\|_\infty^2 I_{\{\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq \alpha\}}].$$

D'après Fubini

$$A_{n,\alpha} = \alpha P(\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq \alpha) + \int_\alpha^\infty P(\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq t)dt.$$

Comme $h \geq 0$, les trajectoires de Y_n^h sont **monotones par morceaux** et donc

$$\|Y_n^h\|_\infty = \sqrt{n} \underset{1\leq k\leq n}{Max} \left| \sum_{j=1}^{k} U_j \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} h(s)ds \right|.$$

Nous devons donc gérer le terme

$$\mathbf{P}(\|\mathbf{Y_n^h}\|_\infty^2 \geq \mathbf{t}) \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{Y_n^h}\|_\infty = \sqrt{n}\,\underset{\mathbf{1\leq k\leq n}}{\mathbf{Max}} \left| \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{k}} \mathbf{U_j} \int_{\frac{\mathbf{j-1}}{\mathbf{n}}}^{\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{n}}} \mathbf{h(s)ds} \right|.$$

Lemme : (Billingsley p.69) Soient $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des variables aléatoires indépendantes de variances $(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$. Si on note $\forall 1 \leq i \leq n$, $s_i^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_i^2$ et $S_i = \xi_1 + \ldots + \xi_i$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$P\left(\underset{1\leq i\leq n}{Max} |S_i| \geq \lambda s_n \right) \leq 2P(|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2})s_n)..$$

Ainsi

$$P(\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq t) \leq 2P\left(\left|Y_n^h(1)\right| \geq \sqrt{t} - \sqrt{2s_n^2} \right)$$

où $s_n^2 = n \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s)ds \right]^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 h^2(s)d(s).$

$$A_{n,\alpha} \leq \underbrace{2\alpha P\left(|Y_n^h(1)| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} - \sqrt{2s_n^2}\right)}_{*} + \underbrace{2\mathbb{E}_P\left[\left(\left[Y_n^h(1) + \sqrt{2s_n^2}\right]^2 - \alpha\right)_+\right]}_{**}.$$

$*$ D'après le théorème de Dini, si N suit une loi normale centrée réduite

$$\alpha P\left(|Y_n^h(1)| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} - \sqrt{2s_n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha P\left(|N| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\int_0^1 h^2(s)d(s)}} - \sqrt{2}\right).$$

$**$ De plus comme les variables $\left(Y_n^h(1)\right)^2$ sont équi-intégrables (par indépendance des U_k)

$$\mathbb{E}_P\left[\left(\left[Y_n^h(1) + \sqrt{2s_n^2}\right]^2 - \alpha\right)_+\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_P\left[\left(\int_0^1 h^2(s)ds\ [N + \sqrt{2}]^2 - \alpha\right)_+\right]$$

et donc

$$\underset{n}{lim}\ sup\ A_{n,\alpha} \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 0.\square$$

B] Approximation de processus gaussien généraux

Soit $(Y^K(t))_{t\in[0,1]}$ un processus gaussien continu de la forme

$$Y^K(t) = \int_0^1 K(t,s)dB_s,$$

le noyau $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :

i) K est mesurable et $K(0,r) = 0$, $r \in [0,1]$.

ii) Il existe une fonction $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue et croissante et un réel $\alpha > 0$ tels que pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$

$$\int_0^1 (K(t_2,r) - K(t_1,r))^2 dr \leq (G(t_2) - G(t_1))^\alpha.$$

Remarque : C'est le cas en particulier du **mouvement brownien fractionnaire** de paramètre de Hurst $0 < H < 1$ ou du **processus d'Ornstein-Uhlenbeck.**

R. Delgado, M. Jolis : Weak approximation for a class of gaussian processes, J. Appl. Prob 37, 400-407, 2000.

On s'intéresse ici à la convergence en loi de Dirichlet du processus continu $\mathbf{Y_n^K = \int_0^1 K(.,s) dX_n(s)}$.

Proposition : Si le noyau K vérifie les hypothèses $i)$ et $ii)$ et si $(U_1, U_1^{\#}) \in L^p(W) \times L^p(W \otimes \widehat{W})$ avec $p > \frac{2}{\alpha} \vee 2$ alors le processus Y_n^K converge en loi de Dirichlet vers $(Y^K)_* S_{OU}$.

Preuve :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{Convergence en loi de } Y_n^K \\ \\ -\text{Calcul fonctionnel généralisé} \\ \\ -\text{Équi-intégrabilité de } \| Y_n^K \|_\infty^2 \end{array} \right.$$

C] Intégrales multiples données par une multi-mesure

Une remarque : Si h **est suffisamment régulière** (à variations bornées, continue à droite),

$$\boxed{\mathbf{X_n} \stackrel{\mathbb{D}-\text{loi}}{\longrightarrow} \mathbf{S_{OU}} \Rightarrow \int_{\mathbf{0}}^{\cdot} \mathbf{h(s)dX_n(s)} \stackrel{\mathbb{D}-\text{loi}}{\longrightarrow} (\int_{\mathbf{0}}^{\cdot} \mathbf{h(s)dB_s})_* \mathbf{S_{OU}}.}$$

Par I.P.P,

$$\int_0^t h(s)dX_n(s) = \int_0^t X_n(s)d\bar{\nu}_t(s) = \phi_h(X_n)$$

où $\phi_h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est $\mathbf{C^1}$ **et lipschitzienne**.

$$\boxed{\textbf{Ainsi } \boldsymbol{\phi_h(X_n)} \textbf{ converge en loi de Dirichlet vers } \boldsymbol{\phi_h}\ {}_*\mathbf{S_{OU}}.}$$

Or d'après la formule d'Ito

$$\int_0^t h(s)dB_s = \int_0^t B_s d\bar{\nu}_t(s) \text{ donc } \phi_h\ {}_*S_{OU} = \left(\int_0^{\cdot} h(s)dB_s\right)\ {}_*S_{OU}.$$

On s'interresse alors à la convergence en loi de Dirichlet de

$$\int_{[0,t]^p} \mathbf{h}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_p}) \mathbf{d}\mathbf{X_n}(\mathbf{x_1}) \ldots \mathbf{d}\mathbf{X_n}(\mathbf{x_p}). \qquad (*)$$

lorsque h est régulière.

Bardina et Jolis ont abordé la convergence en loi de (*) en étudiant le prologement continu à $\mathcal{C}$ de l'application

$$\phi_h : \eta \in C.M \mapsto \int_{[0,.]^p} h(x_1, \ldots, x_p) d\eta(x_1) \ldots d\eta(x_p) \in \mathcal{C},$$

X. Bardina, M. Jolis : Weak convergence to the multiple Stratonovich integral, Sto. Proc. Appl, 90, 277-300, 2000.

Ceci nécessite la notion de multi-mesure.

Définition : Une application $\nu : (\mathcal{B}([0,1]))^p \to \mathbb{R}$ est appelée une multi-mesure si $\forall i \in \{1,\ldots,p\}$, $\forall (A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_p) \in (\mathcal{B}([0,1]))^{p-1}$, l'application

$$A \in \mathcal{B}([0,1]) \mapsto \nu(A_1,\ldots,A_{i-1},A,A_{i+1},\ldots,A_p)$$

est une mesure signée. On dit de plus que h est donnée par la multi-mesure ν si

$$h(x_1,\ldots,x_p) = \nu([x_1,1],\ldots,[x_p,1]).$$

Proposition : *(Bardina-Jolis)* Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) ϕ_h possède une extension continue sur $\mathcal{C}$.

b) La fonction h est donnée par une multi-mesure symétrique ν.

De plus l'extension de ϕ_h est telle que $\forall \eta \in \mathcal{C}$

$$\phi_h(\eta) = \int_{[0,t]^p} \eta(x_1) \dots \eta(x_p) d\bar{\nu}_t(x_1, \dots, x_n)$$

où la famille $(\bar{\nu}_t)_{t\in[0,1]}$ vérifie

$$\|\bar{\nu}_t\|_{FV} \leq \|\nu\|_{FV}.$$

Ainsi **lorsque $\mathbf{h}$ est donnée par une multi-mesure**

$$\int_{[0,\mathbf{t}]^{\mathbf{p}}} \mathbf{h}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_p}) \mathbf{dX_n}(\mathbf{x_1}) \dots \mathbf{dX_n}(\mathbf{x_p}) = \phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{X_n})$$

où $\phi_h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et de **classe $\mathbf{C}^1$** et vérifie

$$|\phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})| \leq \|\nu\|_{\mathbf{FV}} \ \|\mathbf{x}\|_\infty^{\mathbf{p}},$$

$$|\phi'_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})[\tilde{\mathbf{x}}]| \leq \mathbf{p} \ \|\nu\|_{\mathbf{FV}} \ \|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty \ \|\mathbf{x}\|_\infty^{\mathbf{p-1}}.$$

$\boxed{\textbf{Première conséquence :}\ \phi_h(X_n) \text{ convergence en loi dans } \mathcal{C} \text{ vers } \phi_h(B).}$

Pour l'étude de la convergence en loi de Dirichlet de $\phi_h(X_n)$ deux points restent à étudier :

• $\phi_h(X_n) \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}}$?

•• Étude de la convergence de $\mathcal{E}[F(\phi_h(X_n))]$, $\forall F \in C^1 \cap Lip$ et identification de la structure limite.

• Pour le premier point on a l'extension suivante du calcul fonctionnel

Proposition : Soient $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ vérifiant (G) et $X \in \mathbb{D}_B$. $\forall F \in C^1(B, \mathbb{R})$ telle que $|F(x)| \leq K\|x\|_B^p$ et $\|F'(x)\| \leq K\|x\|_B^{p-1}$ on a

$$\left\{\begin{array}{l} \|X\|_B \in L^{2p}(W) \\ \\ \|X^{\#}\|_B \in L^{2p}(W \otimes \hat{W}) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} F(X) \in \mathbb{D} \\ \\ F(X)^{\#} = F'(X)[X^{\#}] \end{array}\right.$$

Conséquences : $\left\{\begin{array}{l} -\text{Si } \ (U_k, U_k^{\#}) \in L^{2p}(W) \times L^{2p}(W \otimes \hat{W}) \text{ alors } \phi_h(X_n) \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}} \\ \\ -\phi_h \in (S_{OU})_{\mathcal{C}} \end{array}\right.$

On suppose $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1^{\#}) \in \mathbf{L}^{2\mathbf{p}}(\mathbf{W}) \times \mathbf{L}^{2\mathbf{p}}(\mathbf{W} \otimes \hat{\mathbf{W}})$, on peut donc étudier la convergence en loi de Dirichlet de $\phi_h(X_n)$. La limite sera $(\phi_h)_* S_{OU}$.

•• Soit $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$, le calcul fonctionnel donne

$$\mathcal{E}[F(\phi_h(X_n))] = \int_W \int_{\hat{W}} \Phi(X_n, X_n^{\#}) dP d\hat{P}$$

où $\Phi : \mathcal{C}^2 \to \mathbb{R}$ est continue vérifiant

$$|\Phi(x,y)| \leq K\|x\|_\infty^{2(p-1)}\|y\|_\infty^2 \leq K max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)^{2p}.$$

On a le lemme suivant

Lemme : Soit $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathcal{C}$, $|\phi(x)| \leq K(1 + \|x\|_\infty^q)$. Lorsque $U_1 \in L^q(W)$

$$\mathbb{E}_P[\Phi(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_\mu[\Phi].$$

et donc

Proposition : Si $\mathbf{h} : \mathbb{R}^{\mathbf{p}} \to \mathbb{R}$ est donnée par une multi-mesure et si $(\mathbf{U_1}, \mathbf{U_1^{\#}}) \in \mathbf{L^{2p}(W)} \times \mathbf{L^{2p}(W \otimes \hat{W})}$ alors $\phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{X_n})$ converge en loi de Dirichlet vers $\phi_{\mathbf{h}}\ {}_*\mathbf{S_{OU}}$

Conclusion et perspectives

• Adaptation possible de ces résultats dans le cadre du théorème de Lindeberg-Feller fonctionnel.

• Structure d'Ornstein Uhlenbeck sur l'espace de Wiener comme objet limite.

• Généralisation de ces résultats pour les EDS.