THÉORÈMES LIMITES ET FORMES DE DIRICHLET

26 Novembre 2004

Christophe Chorro

CERMICS Enpc, CERMSEM Univ Paris I

PLAN DE L'EXPOSE

I) Approche intuitive et outil d'extension

1) Propagation des petites erreurs : Notion heuristique de structure d'erreur
2) Un outil d'extension : Le langage des Formes de Dirichlet
3) Notion d'image et de produit infinis
4) L'opérateur gradient
5) Quelques exemples : Les structures d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck.
6) Identification des structures d'erreur

II) Extension de certains résultats probabilistes en dimension infinie

1) Notion de domaine vectoriel d'une forme de Dirichlet au sens de Feyel-La Pradelle
3) Notion de $\mathbb{D}$-indépendance et de convergence en $\mathbb{D}$-loi
3) Théorème Central Limite
4) Théorème de Donsker
5) Séries approximantes du Mouvement Brownien

III) Quelques pistes d'applications en finance

I 1 : Notion intuitive de structure d'erreur

On considère une grandeur C (par exemple la concentration d'un polluant dans une rivière) qui peut être connue grâce à des mesures dont le résultat est entaché d'une erreur que l'on notera $\triangle C$. Comme souvent en physique ces grandeurs mal connues seront supposées aléatoires et en général corrélées.

Approche probabiliste :

Il faut connaître la loi du couple $(C, \triangle C)$. Le phénomène de propagation des erreurs se traduit par le calcul de lois image.

Approche mixte :

H$_1$: Nous supposons que la quantité $var[\triangle C \mid C]$ est connue et que $\mathbb{E}[\triangle C \mid C] = 0$.

H$_2$: On considère les erreurs petites ce qui nous permettra d'utiliser les règles de simplification d'usage. Ainsi $\triangle C = \varepsilon Y$ où Y est une variable aléatoire bornée et où ε est un paramètre de calibration des erreurs.

Si f et g sont de classe C^3 avec des dérivées bornées, on a alors les formules de propagation suivantes :

1)

$$var[\triangle f(C) \mid C] = f'^2(C)var[\triangle C \mid C] + \varepsilon^3\, 0(1)$$

$$\mathbb{E}[\triangle f(C) \mid C] = \tfrac{1}{2} f''(C)var[\triangle f(C) \mid C] + \varepsilon^3\, 0(1).$$

2)

$$var[\triangle(g \circ f(C)) \mid C] = g'^2(f(C))var[\triangle f(C) \mid C] + \varepsilon^3\, 0(1)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\triangle(g \circ f(C)) \mid C] = g'(f(C))\mathbb{E}[\triangle f(C) \mid C] + \\ \frac{1}{2} g''(f(C))var[\triangle f(C) \mid C] + \varepsilon^3\, 0(1).\end{aligned}$$

Le calcul de variance est un calcul du premier ordre ne faisant intervenir que les variances. Le calcul de biais est un calcul du second ordre faisant intervenir variances et biais.

Sur l'espace $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), loi\ de\ C)$, on peut alors introduire l'opérateur Γ^C, appelé opérateur d'erreur quadratique, défini par

$$\Gamma^C[f](x) = \underset{\varepsilon \to 0}{Lim} \frac{var[\triangle f(C) \mid C = x]}{\varepsilon^2}.$$

Pour $f = Id$,

$$\Gamma^C[Id](x) = \underset{\varepsilon \to 0}{Lim} \frac{var[\triangle C \mid C = x]}{\varepsilon^2} = var[Y|C].$$

Γ^C se polarise en un opérateur symétrique, positif, bilinéaire vérifiant le calcul fonctionnel suivant : si $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ avec des dérivées partielles bornées

$$\begin{aligned}\Gamma^C[F(f,g)] = {} & F_1'^2(f,g)\Gamma^C[f] + F_2'^2(f,g)\Gamma^C[g] \\ & +2F_1'(f,g)F_2'(f,g)\Gamma^C[f,g].\end{aligned}$$

Propagation "à la Gauss" (1821)

Le terme $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), loi\ de\ C, \Gamma^C)$ est appelé une **structure d'erreur** lorsque Γ^C est symétrique, positif, bilinéaire et vérifie le calcul fonctionnel précédent.

I 2 : Le langage des formes de Dirichlet

Dorénavant une structure d'erreur sera un terme $(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ où $(W, \mathcal{W}, m)$ est un espace de probabilité et Γ un opérateur bilinéaire, symétrique, positif de domaine $\mathbb{D}$ dense dans $L^2(m)$, à valeurs dans $L^1(m)$ et vérifiant :

1) **Le calcul fonctionnel** de classe $C^1 \cap Lip$:
soient $U = (U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{D}^n$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap Lip$ alors $F(U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{D}$ et

$$\Gamma[F(U_1, \ldots, U_n)] = \sum_{i,j=1}^{n} F_i'(U) F_j'(U) \Gamma[U_i, U_j]$$

avec $\Gamma[V] := \Gamma[V, V]$ (V dans $\mathbb{D}$).

2) $1 \in \mathbb{D}$, $\Gamma[1] = 0$.

3) La forme bilinéaire définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ par

$$\mathcal{E}[F, G] = \frac{1}{2} \int \Gamma[F, G] dm$$

est **fermée** au sens où $\mathbb{D}$ muni de la norme du graphe notée

$$\| \,.\, \|_{\mathcal{E}} = (\| \,.\, \|^2_{L^2(m)} + \mathcal{E}[.])^{\frac{1}{2}}$$

est complet.

AVANTAGES

• **Extension naturelle** de l'approche heuristique (propriété 1)

• **Souplesse technique** (Image, produits)

• La propriété (3) assure un calcul fonctionnel sur les fonctions Lip avec, lorsque F est contractante,

$$\Gamma[F(U)] = (F'(U))^2\, \Gamma[U] \leq \Gamma[U].$$

• **Possibilité d'un calcul de biais** : on peut associer de manière unique à $\mathcal{E}$ un opérateur auto-adjoint A de domaine $D(A) \subset \mathbb{D}$ tel que

$$A[F(U)] = F'(U)A[U] + \frac{1}{2}F''(U)\Gamma[U]$$

lorsque $U \in D(A)$, $\Gamma[U] \in L^2(m)$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 avec des dérivées bornées.

I 3 : Image et Produit infinis

• Image

Remarque : *Si U est définie sur $(W, \mathcal{W}, m)$ la loi image $U_* m$ est définie par*

$$\mathbb{E}_{U_* m}[F] = \mathbb{E}_m[F(U)].$$

Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur et $U \in \mathbb{D}^d$. On peut voir que la forme bilinéaire

$$(C^1(\mathbb{R}^d) \cap Lip, F \mapsto \mathcal{E}[F(U)])$$

est fermable et que sa plus petite extension fermée $(\mathbb{D}_U, \mathcal{E}_U)$ est une forme de Dirichlet locale ayant un opérateur carré du champ noté Γ_U. La structure d'erreur

$$U_* S = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_* m, \mathbb{D}_U, \Gamma_U)$$

est appelée **l'image de S par U** ou la **$\mathbb{D}$-loi de U**.

• Produits infinis

Soit $S_n = (W_n, \mathcal{W}_n, m_n, \mathbb{D}_n, \Gamma_n)$, $n \geq 0$, une famille de structures d'erreur. La structure produit

$$(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma) = \prod_{n=0}^{\infty} S_n$$

est définie par $(W, \mathcal{W}, m) = (\prod_{n=0}^{\infty} W_n, \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n, \otimes_{n=0}^{\infty} m_n)$ avec un domaine explicite $\mathbb{D}$ et $\forall F \in \mathbb{D}$,

$$\Gamma[F] = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n[F].$$

Application : Deux variables aléatoires $U_1 \in \mathbb{D}^p$ et $U_2 \in \mathbb{D}^m$ sont dites $\mathbb{D}$**-indépendantes** ssi

$$(U_1)_* S \otimes (U_2)_* S = (U_1, U_2)_* S.$$

I 4 : L'opérateur gradient

But : Introduire un outils technique simplifiant les calculs.

• Le gradient

On dira qu'une structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ possède un gradient ssi il existe un espace de Hilbert séparable $(\mathcal{H}, \|\|_{\mathcal{H}})$ et un opérateur ∇ de $\mathbb{D}$ dans $L^2(m; \mathcal{H})$ telle que

$$\forall X \in \mathbb{D} \quad \| \nabla X \|_{\mathcal{H}}^2 = \Gamma[X].$$

L'hypothèse est peu restrictive (Mokobovski).

Remarque : Le gradient est un opérateur linéaire, vérifiant la chain rule. C'est une version linéaire et signée de l'écart type.

I 5 : Exemples de structures d'erreur

• Sur $\mathbb{R}$ on les connaît toutes (Théorème de Hamza)

Structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m = \mathcal{N}(0,1), H^1(m), (u')^2).$$

• Sur l'espace de Wiener

La structure d'erreur d' Ornstein-Uhlenbeck de paramètre c sur l'espace de Wiener $\mathcal{C} = (C_0([0,1], \mathbb{R}), \|\|_\infty)$ équipé de la mesure de Wiener ν :

$$S^c_{OU} = (\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \nu, \mathbb{D}_{OU}, \Gamma^c_{OU})$$

où Γ^c_{OU} est entièrement déterminé par son action sur les fonctions cylindriques régulières : si $F = f(\lambda_1, .., \lambda_n)$ est une fonction cylindrique régulière,

$$\Gamma^c_{OU}[F] = c \times \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ < \lambda_i, \lambda_j >_{L^2([0,1],dx)} \ .$$

Cette structure possède un gradient ∇ à valeurs dans $L^2([0,1], dx)$ défini par

$$\nabla[F] = \sqrt{c} \times \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ \lambda_i.$$

• Structures de type Ornstein-Ulhenbeck

Soit B un espace de Banach séparable, on pose

$\mathcal{A} = \{f(\lambda_1, .., \lambda_n); n \in \mathbb{N}, f \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap Lip, (\lambda_1, .., \lambda_n) \in (B')^n\}.$

On dit qu'une structure d'erreur sur B

$$S = (B, \mathcal{B}(B), m, \mathbb{D}, \Gamma)$$

est de type Ornstein-Ulhenbeck si m est une mesure gaussienne sur B, $\mathcal{A} \subset \mathbb{D}$ et pour $F = f(\lambda_1, .., \lambda_n) \in \mathcal{A}$,

$$\Gamma[F] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, a_{i,j}$$

où les coefficients $a_{i,j}$ dépendent seulement de (λ_i, λ_j).

I 6 Identification des structures d’erreur

Comment obtenir concrètement des structures d’erreur associées à l’observation d’un phénomène ?

• **En dimension finie :** Les structures d’erreur sont solidement reliées aux statistiques paramétriques via la notion d’information de Fisher.

Cf : *N.Bouleau et Ch.Chorro, "Error structure and parameter estimation", note C.R.A.S, Février 2004.*

• **La dimension infinie est typiquement le cadre de la finance mathématique (Espace de Wiener), d’autres techniques doivent être mises en place :** Raffinement des grands théorèmes probabilistes.

Problème : Donner une extension de la définition du domaine d’une forme de Dirichlet pour des variables à valeurs dans un espace de dimension infinie.

II 1 : Domaine vectoriel

Soit B un espace de Banach qui possède une base de Schauder.

Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur (fixée dans toute la partie) qui possède un gradient.

But : Étendre la notion de domaine aux variables à valeurs dans B.

La réponse a été donnée par **Feyel-La Pradelle**.

On note $\mathbb{D}_B$ le domaine vectoriel constitué de variables dans $L^2(m; B)$ ($\mathbb{D}_{\mathbb{R}^p} = \mathbb{D}^p$).

Propriétés de $\mathbb{D}_B$:

• Soit F une fonction Lipschitzienne de B dans $\mathbb{R}$,

$$U \in \mathbb{D}_B \Rightarrow F(U) \in \mathbb{D}.$$

• Si on suppose de plus F de classe C^1, **on a l'extension du calcul fonctionnel.**

- **Image**

Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur et $U \in \mathbb{D}_B$. On peut voir que la forme bilinéaire

$$(C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip, F \mapsto \mathcal{E}[F(U)])$$

est fermable et que sa plus petite extension fermée $(\mathbb{D}_U, \mathcal{E}_U)$ est une forme de Dirichlet locale ayant un opérateur carré du champ noté Γ_U. La structure d'erreur

$$U_*S = (B, \mathcal{B}(B), U_*m, \mathbb{D}_U, \Gamma_U)$$

est appelée **l'image de S par U** ou la $\mathbb{D}$**-loi de U**.

II 2 : $\mathbb{D}$-indépendance, convergence en $\mathbb{D}$-loi

• $\mathbb{D}$-indépendance

Deux variables aléatoires U_1 et $U_2 \in \mathbb{D}_B$ sont dites $\mathbb{D}$-indépendantes ssi

$$(U_1)_* S \otimes (U_2)_* S = (U_1, U_2)_* S.$$

Remarque : On a un théorème de représentation.

• Convergence en $\mathbb{D}$-loi

On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}_B$ converge en $\mathbb{D}$-loi si il existe une structure d'erreur $\tilde{S} = (B, \mathcal{B}(B), P, \tilde{\mathbb{D}}, \tilde{\Gamma})$ telle :
i) $(U_n)_* m \to P$ en loi dans B,
ii) $C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip \subset \tilde{\mathbb{D}}$ et $\forall F \in C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip$,
$\mathcal{E}[F(U_n)] \to \tilde{\mathcal{E}}[F]$.

II 3 : Tcl Hilbertien

Soit $(H, <>)$ un espace de Hilbert séparable et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires centrées de $\mathbb{D}_H$, $\mathbb{D}$-indépendantes de même $\mathbb{D}$-loi. Si l'on note Σ l'opérateur de covariance de U_1, alors, $V_n = \frac{U_1+\ldots+U_n}{\sqrt{n}}$ converge en $\mathbb{D}$-loi vers
$\tilde{S} = (H, \mathcal{B}(H), \nu, \tilde{\mathbb{D}}, \tilde{\Gamma})$ où

i) ν est une mesure gaussienne centrée sur H d'opérateur de covariance Σ ,

ii) $\forall F \in C^1(H,\mathbb{R}) \cap Lip$, $F \in \tilde{\mathbb{D}}$ et

$$\tilde{\mathcal{E}}[F] = \frac{1}{2}\int_{H^2} < F'(x), y >^2 \, d\mu(x,y)$$

où μ est une mesure gaussienne centrée sur H^2 d'opérateur de covariance K défini par $\forall z = (z_1, z_2), \tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ in H^2

$$< Kz, \tilde{z} >_{H^2} = < \Sigma z_1, \tilde{z}_1 > + \mathcal{E}[< U_1, z_2 >, < U_1, \tilde{z}_2 >],$$

iii) $(C^1(H,\mathbb{R}) \cap Lip, \tilde{\mathcal{E}})$ est fermable. Sa plus petite extension fermée $(\tilde{\mathbb{D}}, \tilde{\mathcal{E}})$ admettant un opérateur carré du champ $\tilde{\Gamma}$.

Ainsi (V_n) converge en $\mathbb{D}$-loi vers une structure d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck.

En effet si $F = f(< e_{i_1}, . >, ..., < e_{i_p}, . >)$,

$$\tilde{\Gamma}[F] = \sum_{k,l=1}^{p} f'_k f'_l(< e_{i_1}, x >, ..., < e_{i_p}, x >) a_{i_k, i_l}$$

où $a_{i_k, i_l} = \mathcal{E}[< e_{i_k}, U_1 >, < e_{i_l}, U_1 >]$.

Remarque : L'extension de ce théorème aux espaces de Banach de type 2 est une question ouverte.

II 4 : Théorème de Donsker

• **Rappel :** Soit (U_k) une suite de variables aléatoires i.i.d centrées réduites. Pour $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1})$$

où $[nt]$ est la partie entière de nt.

Alors (X_n) converge en loi sur l'espace de Wiener vers le mouvement Brownien.

• **Extension : (*Nicolas Bouleau à paraître dans Bul.Sci.Math*)**

On considère les U_k $\mathbb{D}$-indépendantes de même $\mathbb{D}$-loi (qui possède un gradient), alors

(X_n) **converge en $\mathbb{D}$-loi vers S_{OU}.**

Ingrédient : Extension purement probabiliste du théorème de Donsker.

Remarque : On a des résultats de convergence analogues pour des processus de la forme $\int_0^{\cdot} f(s)dX_n(s)$ et pour $\|X_n\|_\infty$.

II 5 : Séries approximantes du M.B

• **Rappel :** On se donne une suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace $(W, \mathcal{W}, P)$, à valeurs réelles, i.i.d suivant une loi normale centrée réduite. Pour $t \in [0,1]$, on note

$$Y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k \int_0^t \phi_k(s)ds$$

où $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1], dx)$.

Alors $(Y_n(.))_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge presque sûrement dans** $\mathcal{C}$ **et dans** $L^2(P;\mathcal{C})$ **vers une variable aléatoire ayant pour loi la mesure de Wiener sur** $\mathcal{C}$.

• **Du coté des simulations :** Si l'on veut simuler un M.B grâce à (Y_n) (Méthode de Karhunen-Loève), on doit générer des gaussiennes indépendantes :

3 méthodes : Inversion, **Box muller**, C.L.T.

Pour la méthode d'inversion : On note F la fonction de répartition d'une gaussienne standard, soit (U_k) une suite de variables uniformes sur $[0,1]$ indépendantes, on pose

$$Y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} F^{-1}(U_k) \int_0^t \phi_k(s)ds.$$

On suppose les (U_k) erronées, $\mathbb{D}$-indépendantes, de même $\mathbb{D}$-loi donnée par la structure suivante

$$S = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx, \mathbb{d}, f \mapsto a(x)(f'(x))^2)$$

(a vérifiant les conditions du théorème d'Hamza et une condition d'intégrabilité pour que $F^{-1} \in \mathbb{d}$).

(Y_n) **converge en loi de Dirichlet vers** S_{OU}**.**

Travaux en cours : Pour un générateur de nombre pseudo aléatoire donné, trouver S par des moyens statistiques et étudier le cas des suites à discrépance faible (théorème de Koksma).

Remarque : Ceci se généralise à tous les processus gaussiens vérifiant la condition de continuité de Fernique. C'est le cas par exemple du M.B fractionnaire de paramètre de Hurst $0 < H < 1$.

III : Applications financières

• Les théorèmes précédents légitiment l'emploi de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck pour l'étude de la sensibilité d'un modèle financier à une perturbation du Brownien.

Nicolas Bouleau, Error Calculus and Path Sensitivity in Financial Models, Mathematical finance 13, 115-134, 2003.

• L'emploi de S_{OU} permet de dérouler toute la puissante machinerie du calcul de Malliavin :

-Régularité des lois.

-Intégration par partie : méthodes d'internalization pour le calcul des grecs.

• Méthode des éléments finis.

• L'opérateur $\#$

C'est un gradient particulier construit avec une copie $(\tilde{W}, \tilde{\mathcal{W}}, \tilde{m})$ de l'espace initial : Soit J une isométrie de $\mathcal{H}$ dans $L^2((\tilde{W}, \tilde{\mathcal{W}}, \tilde{m}))$ telle que $\forall h \in \mathcal{H}$, $\mathbb{E}_{\tilde{m}}[J(h)] = 0$, on pose $\forall U \in \mathbb{D}$,

$$U^{\#} = J(\nabla U) \in L^2(m \otimes \tilde{m}).$$

• Le domaine vectoriel

Définition (Feyel-La Pradelle) : On note $\mathbb{D}_B$ l'espace vectoriel des variables aléatoires U dans $L^2(m; B)$ telles qu'il existe g dans $L^2(m \otimes \tilde{m}; B)$ telle que

$$\forall \lambda \in B',\ <\lambda, U> \in \mathbb{D}\ \ et\ \ <\lambda, U>^{\#} = <\lambda, g> .$$

On pose $g = U^{\#}$ et on équipe $\mathbb{D}_B$ de la norme

$$\| U \|_{\mathbb{D}_B} = \left(\| U \|^2_{L^2(m;B)} + \frac{1}{2} \| U^{\#} \|^2_{L^2(m \times \tilde{m};B)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

(Ainsi $\mathbb{D}_{\mathbb{R}^p} = \mathbb{D}^p$.)

Exemple : Si B est un espace de Hilbert séparable on a la caractérisation suivante :

$$U \in \mathbb{D}_B$$

$$\Updownarrow$$

Il existe une B.O.N $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de B telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}, < e_i, U > \in \mathbb{D} \text{ et } \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{E}[< e_i, U >] < \infty.$$

et dans ce cas

$$U^{\#} = \sum_{i=0}^{\infty} < e_i, U >^{\#} e_i.$$

• Calcul Fonctionnel

Proposition : Soit F une fonction Lipschitzienne de B dans $\mathbb{R}$.
a) Si $U \in \mathbb{D}_B$, $F(U) \in \mathbb{D}$ et $\Gamma[F(U)] \leq K^2 \mathbb{E}_{\tilde{m}}[\| U^{\#} \|_B^2]$.
b) Si on suppose de plus F de classe C^1,

$$\Gamma[F(U)] = \mathbb{E}_{\tilde{m}}[< F'(U), U^{\#} >^2]. \quad (*)$$

Remarque : Si $B = \mathbb{R}^p$

$$(*) \Leftrightarrow \Gamma[F(U)] = \sum_{i,j=1}^{p} F_i'(U) F_j'(U) \Gamma[U_i, U_j]$$