LE CALCUL D’ERREUR PAR LE LANGAGE DES FORMES DE DIRICHLET :

UNE APPROCHE STATISTIQUE

Groupe Mode 2004

Christophe Chorro, Nicolas Bouleau

CERMICS Enpc, CERMSEM Univ Paris I

PLAN DE L'EXPOSE

- Notion intuitive de structure d'erreur
- Extension : Le langage des formes de Dirichlet
- Un exemple en finance
- Lien avec les statistiques (Identification des structures d'erreur)

Notion intuitive de structure d'erreur

On considère une grandeur C (par exemple la concentration d'un polluant dans une rivière) qui peut être connue grâce à des mesures dont le résultat est entaché d'une erreur que l'on notera $\triangle C$. Comme souvent en physique ces grandeurs mal connues seront supposées aléatoires et en général corrélées.

Approche probabiliste :

Il faut connaitre la loi du couple $(C, \triangle C)$. Le phénomène de propagation des erreurs se traduit par le calcul de lois image.

Approche mixte :

$\mathbf{H}_1$: Nous supposons que la quantité $var[\triangle C \mid C]$ est connue et que $\mathbb{E}[\triangle C \mid C] = 0$.

$\mathbf{H}_2$: On considère les erreurs petites ce qui nous permettra d'utiliser les régles de simplification d'usage. Ainsi $\triangle C = \varepsilon Y$ où Y est une variable aléatoire bornée et où ε est un paramètre de calibration des erreurs.

Si f et g sont de classe C^3 avec des dérivées bornées, on a alors les formules de propagation suivantes :

1)

$$var[\triangle f(C) \mid C] = f'^2(C) var[\triangle C \mid C] + \varepsilon^3\, 0(1)$$

$$\mathbb{E}[\triangle f(C) \mid C] = \tfrac{1}{2} f''(C) var[\triangle f(C) \mid C] + \varepsilon^3\, 0(1).$$

2)

$$var[\triangle(g \circ f(C)) \mid C] = g'^2(f(C)) var[\triangle f(C) \mid C] + \varepsilon^3\, 0(1)$$

$$\mathbb{E}[\triangle(g \circ f(C)) \mid C] = g'(f(C))\mathbb{E}[\triangle f(C) \mid C] + \frac{1}{2} g''(f(C)) var[\triangle f(C) \mid C] + \varepsilon^3\, 0(1).$$

Le calcul de variance est un calcul du premier ordre ne faisant intervenir que les variances. Le calcul de biais est un calcul du second ordre faisant intervenir variances et biais.

Sur l'espace $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), loi\ de\ C)$, on peut alors introduire l'opérateur Γ^C, appelé opérateur d'erreur quadratique, défini par

$$\Gamma^C[f](x) = \underset{\varepsilon \to 0}{Lim} \frac{var[\triangle f(C) \mid C = x]}{\varepsilon^2}.$$

Pour $f = Id$,

$$\Gamma^C[Id](x) = \underset{\varepsilon \to 0}{Lim} \frac{var[\triangle C \mid C = x]}{\varepsilon^2} = var[Y|C].$$

Γ^C se polarise en un opérateur symétrique, positif, bilinéaire vérifiant le calcul fonctionnel suivant : si $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ avec des dérivées partielles bornées

$$\begin{aligned}\Gamma^C[F(f,g)] = F_1'^2(f,g)\Gamma^C[f] + F_2'^2(f,g)\Gamma^C[g] \\ +2F_1'(f,g)F_2'(f,g)\Gamma^C[f,g].\end{aligned}$$

Propagation "à la Gauss" (1821)

Le terme $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), loi\ de\ C, \Gamma^C)$ est appelé une **structure d'erreur** lorsque Γ^C est symétrique, positif, bilinéaire et vérifie le calcul fonctionnel précédent.

Le langage des formes de Dirichlet

Dorénavant une structure d'erreur sera un terme $(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ où $(W, \mathcal{W}, m)$ est un espace de probabilité et Γ un opérateur bilinéaire, symétrique, positif de domaine $\mathbb{D}$ dense dans $L^2(m)$, à valeurs dans $L^1(m)$ et vérifiant :

1) Le calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$:
soient $U = (U_1, \dots, U_n) \in \mathbb{D}^n$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap Lip$ alors $F(U_1, \dots, U_n) \in \mathbb{D}$ et

$$\Gamma[F(U_1, \dots, U_n)] = \sum_{i,j=1}^{n} F_i'(U) F_j'(U) \Gamma[U_i, U_j]$$

avec $\Gamma[V] := \Gamma[V, V]$ (V dans $\mathbb{D}$).

2) $1 \in \mathbb{D}$, $\Gamma[1] = 0$.

3) La forme bilinéaire définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ par

$$\mathcal{E}[F, G] = \frac{1}{2} \int \Gamma[F, G] dm$$

est **fermée** au sens où $\mathbb{D}$ muni de la norme du graphe notée

$$\| \,.\, \|_{\mathcal{E}} = (\| \,.\, \|^2_{L^2(m)} + \mathcal{E}[.])^{\frac{1}{2}}$$

est complet.

AVANTAGES

• **Extension naturelle** de l'approche heuristique (propriété 1)

• **Souplesse technique** (Image, produits)

• La propriété (3) assure un calcul fonctionnel sur les fonctions Lip avec, lorsque F est contractante,

$$\Gamma[F(U)] \leq \Gamma[U].$$

• **Possibilité d'un calcul de biais** : on peut associer de manière unique à $\mathcal{E}$ un opérateur auto-adjoint A de domaine $D(A) \subset \mathbb{D}$ tel que

$$A[F(U)] = F'(U)A[U] + \frac{1}{2}F''(U)\Gamma[U]$$

lorsque $U \in D(A)$, $\Gamma[U] \in L^2(m)$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 avec des dérivées bornées.

Un exemple en finance

On note r le taux des placements sans risques que l'on suppose constant. On considère un actif financier suivant le modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t)$$

de sorte que le cours actualisé soit une martingale. Si le payoff d'une option européenne d'échéance T est donné par $f(S_T)$ on sait que la valeur V_t de l'option à l'instant t est

$$V_t = F(t, S_t, \sigma, r)$$

où

$$F(t,x,\sigma,r) = e^{-r(T-t)} \int f\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}\right) \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy.$$

Si f est à croissance linéaire, F est très régulière et l'on peut définir les grecs :

$$delta_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t, \sigma, r)$$
$$gamma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t, \sigma, r).$$

On suppose la **volatilité erronée** et l'on modélise cette erreur par la structure d'erreur $(\mathbb{R}_+^*, Bor(R_+^*), m, \mathbb{D}, \Gamma)$ vérifiant $Id \in \mathbb{D}$ où $\Gamma[Id]$ représente la variance conditionnelle de l'erreur sur σ.

Comme $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$ et $V_t = F(t, S_t, \sigma, r)$ on a les formules de propagation suivantes :

$$\Gamma[S_t] = (B_t - \sigma t)^2 S_t^2 \Gamma[Id]$$

$$\Gamma[V_t] = (S_t(B_t - \sigma t)delta_t + (T - t)\sigma S_t^2 gamma_t)^2 \Gamma[Id]$$

$$\Gamma[V_0] = T^2 \sigma^2 S_0^4 gamma_0^2 \Gamma[Id]$$

$$\Gamma[delta_t] = gamma_t^2 \Gamma[S_t]$$

Question : Comment déterminer $\Gamma[Id]$?

-Faire un choix a priori (vaste littérature).

-Mettre en place une détermination statistique à partir de l'expérience.

Identification statistique

1 Problématique

Soit $\theta \in \mathbb{R}^d$ un paramètre qui peut être vu comme la réalisation d'une variable aléatoire Θ. On considère que procéder à une mesure de θ c'est estimer θ statistiquement à l'aide d'une famille paramétrée de probabilité $(P_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}^d}$. Nous tentons de trouver une structure d'erreur

$$S = (\mathbb{R}^d, Bor(\mathbb{R}^d), \rho, \mathbb{D}, \Gamma)$$

telle que l'opérateur Γ exprime la précision de la connaissance que l'on a sur θ avec les moyens statistiques employés.

Notre approche consiste sous les conditions précisées ci-dessous à identifier Γ à l'inverse de la matrice d'information de Fisher qui, pour les modèles statistiques paramétriques réguliers, est une mesure de la connaissance disponible.

2 Borne de Cramer-Rao et identification fondamentale

On suppose que la modèle $(P_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}^d}$ est dominé par une mesure σ-finie μ avec

$$dP_\theta = f(.,\theta)d\mu \text{ avec } f(.,\theta) \text{ régulière en } \theta.$$

On se donne une observation X c'est a dire une variable aléatoire telle que la loi de X sachant $\Theta = \theta$ est P_θ.

Théorème : Soit $T(X)$ est un estimateur sans biais de θ tel que la fonction $\theta \to \int T^2(x)f(x,\theta)d\mu(x)$ est localement bornée alors $\forall\theta$,

$$\underline{\mathbb{E}[(T(X)-\theta)(T(X)-\theta)^t \mid \Theta = \theta] \geq J^{-1}(\theta)}$$

où $\geq$ est ici la relation d'ordre au sens des matrices symétriques et où J est la matrice d'information de Fisher du modèle

$$J(\theta) = \left[\int \frac{\partial log(f(x,\theta))}{\partial\theta_i}\frac{\partial log(f(x,\theta))}{\partial\theta_j} f(x,\theta)d\mu(x)\right]_{i,j} \blacksquare$$

On pose alors

$$\boxed{\underline{\underline{\Gamma}}[Id] = J^{-1} \quad \textbf{(I.F)}}$$

La probabilité a priori ρ n’intervient pas dans l’identification fondamentale, si ce n’est par la condition technique que la propriété de complétion doit être vérifiée.

On a donc un nouvel outil opérationnel pour tenir compte de la précision dans les modélisations.

Retour à Black-Scholes

Comme dans le cadre du modèle de Black-Scholes les variables aléatoires

$$Y_1^N = Log\left(\frac{S_{\frac{T}{N}}}{S_0}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{N} + \sigma B_{\frac{T}{N}}$$

$$\vdots$$

$$Y_N^N = Log\left(\frac{S_T}{S_{\frac{(N-1)T}{N}}}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{N} + \sigma(B_T - B_{\frac{(N-1)T}{N}})$$

sont i.i.d de loi

$$\mathcal{N}((r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{N}, \sigma^2\frac{T}{N}),$$

on a un modèle paramétrique naturel d'estimation de la volatilité qui conduit à

$$\Gamma[Id](\sigma) = \frac{\sigma^2}{2N + \sigma^2 T}.$$

Ainsi lorsque $N \to +\infty$

$$\frac{\sqrt{\Gamma[Id](\sigma)}}{\sigma} = 0.$$

Conclusion et Remarques

A) L'identification fondamentale possède de remarquables propriétés algébriques : **compatibilité avec les notions d'image et de produits.** Elle est de plus intimement liée à la théorie des statistiques asymptotiques.

Cf *N.Bouleau et Ch.Chorro, "Error structure and parameter estimation", note C.R.A.S, February 2004.*

B) Des outils opérationnels en dimension infinie grâce à des résultats de type théorème central limite, Donsker (perturbation du brownien dans Black-Scholes).