THÉORÈME DE DONSKER
et
FORMES DE DIRICHLET

Christophe Chorro (Université Paris 1, Enpc)

12 Mai 2005

Plan de l'exposé

I) Approche intuitive et outil d'extension

1) Propagation des petites erreurs : Notion heuristique de structure d'erreur

2) Un outil d'extension : Le langage des Formes de Dirichlet

3) Notion d'image et de produits infinis

4) Exemples

5) Identification des structures d'erreur

II) Domaine vectoriel d'une forme de Dirichlet

III) Extensions du théorème de Donsker

I_1 : Notion intuitive de structure d'erreur

Soit C une grandeur physique connue grâce à des mesures dont le résultat est entaché d'une erreur que l'on notera $\triangle C$.

Ces grandeurs mal connues seront supposées aléatoires (en général corrélées).

• Approche probabiliste :

Il faut connaître la loi du couple $(C, \triangle C)$:

Calcul de propagation $\Leftrightarrow$ Calcul de lois image

• Approche mixte :

H$_1$: On suppose $var[\triangle C \mid C]$ connue et $\mathbb{E}[\triangle C \mid C] = 0$.

H$_2$: **Erreurs petites** : $\triangle C = \varepsilon Y$ (Y bornée, ε paramètre de calibration).

Le problème de la propagation se simplifie.

Soient $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de classe C^3 avec des dérivées bornées. On pose

$$\mathbf{b_0 = 0 \quad \sigma_0^2 = var[\triangle C \mid C]}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{b_n = \mathbb{E}[\triangle g_n(C) \mid C]} \quad \text{et} \quad \mathbf{\sigma_n^2 = var[\triangle g_n(C) \mid C]}$$

où $g_n = f_n o \ldots o f_1$. On note $x_n = g_n(C)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{\sigma_n^2 = (f_n')^2[x_{n-1}]\ \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon^3\ 0(1)} \\ &\mathbf{b_n = f_n'[x_{n-1}]\ \ b_{n-1} + \frac{1}{2}\ \ f_n''[x_{n-1}]\ \ \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon^3\ \ 0(1).} \end{aligned}}$$

Le calcul de variance est un calcul du premier ordre ne faisant intervenir que les variances. Le calcul de biais est un calcul du second ordre faisant intervenir variances et biais.

• Définition heuristique

Sur l'espace $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), loi\ de\ C)$, on peut alors introduire l'opérateur Γ^C, appelé opérateur d'erreur quadratique, défini par

$$\Gamma^C[f](x) = \underset{\varepsilon \to 0}{Lim} \frac{var[\triangle f(C) \mid C = x]}{\varepsilon^2}.$$

Pour $f = Id$,

$$\Gamma^C[Id](x) = \underset{\varepsilon \to 0}{Lim} \frac{var[\triangle C \mid C = x]}{\varepsilon^2} = var[Y|C = x].$$

Γ^C se polarise en un opérateur symétrique, positif, bilinéaire vérifiant le calcul fonctionnel suivant : si $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ avec des dérivées partielles bornées

$$\Gamma^C[F(f,g)] = (F_1')^2(f,g)\Gamma^C[f] + (F_2')^2(f,g)\Gamma^C[g] + 2F_1'(f,g)F_2'(f,g)\Gamma^C[f,g].$$

Propagation "à la Gauss" (1821)

Le terme $(\mathrm{\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), loi\ de\ C, \Gamma^C})$ **est appelé une structure d'erreur**.

I_2 : Le langage des formes de Dirichlet

Dorénavant une structure d'erreur sera un terme $(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ où $(W, \mathcal{W}, m)$ est un espace de probabilité et Γ un opérateur bilinéaire, symétrique, positif de domaine $\mathbb{D}$ dense dans $L^2(m)$, à valeurs dans $L^1(m)$ et vérifiant :

1) Le calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$:
soient $U = (U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{D}^n$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap Lip$ alors $F(U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{D}$ et

$$\Gamma[F(U_1, \ldots, U_n)] = \sum_{i,j=1}^{n} F'_i(U) F'_j(U) \Gamma[U_i, U_j]$$

avec $\Gamma[V] := \Gamma[V, V]$ (V dans $\mathbb{D}$).

2) $1 \in \mathbb{D}$, $\Gamma[1] = 0$.

3) La forme bilinéaire définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ par

$$\mathcal{E}[F, G] = \frac{1}{2} \int_W \Gamma[F, G] dm$$

est **fermée** au sens où $\mathbb{D}$ muni de la norme du graphe notée

$$\| \,.\, \|_{\mathbb{D}} = (\| \,.\, \|^2_{L^2(m)} + \mathcal{E}[.])^{\frac{1}{2}}$$

est complet.

AVANTAGES

• **Extension naturelle** de l'approche heuristique (propriété 1)

• **Souplesse technique** (Image, produits)

• La propriété (3) assure un calcul fonctionnel sur les fonctions Lip avec, lorsque F est contractante,

$$\Gamma[F(U)] \leq \Gamma[U].$$

• **Possibilité d'un calcul de biais** : on peut associer de manière unique à $\mathcal{E}$ un opérateur auto-adjoint A de domaine $D(A) \subset \mathbb{D}$ tel que

$$A[F(U)] = F'(U)A[U] + \frac{1}{2}F''(U)\Gamma[U]$$

lorsque $U \in D(A)$, $\Gamma[U] \in L^2(m)$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 avec des dérivées bornées.

I_3 : Image et Produits infinis

Remarque : *Si* U *est définie sur* $(W, \mathcal{W}, m)$ *la loi image* $U_* m$ *est définie par*

$$\mathbb{E}_{U_* m}[F] = \mathbb{E}_m[F(U)].$$

• Structure image

Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur et $U \in \mathbb{D}^d$. La forme bilinéaire

$$(C^1(\mathbb{R}^d) \cap Lip, (F, G) \mapsto \mathcal{E}[F(U), G(U)])$$

est fermable.

Sa plus petite extension fermée $(\mathbb{D}_U, \mathcal{E}_U)$ est une forme de Dirichlet locale ayant un opérateur carré du champ noté Γ_U.

La structure d'erreur

$$U_* S = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_* m, \mathbb{D}_U, \Gamma_U)$$

est appelée **l'image de $\mathbf{S}$ par $\mathbf{U}$** ou la **$\mathbb{D}$-loi de $\mathbf{U}$**.

• Produits infinis

Soit $S_n = (W_n, \mathcal{W}_n, m_n, \mathbb{D}_n, \Gamma_n)$, $n \geq 0$, une famille de structures d'erreur. La structure produit

$$(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma) = \prod_{n=0}^{\infty} S_n$$

est définie par $(W, \mathcal{W}, m) = (\prod_{n=0}^{\infty} W_n, \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n, \otimes_{n=0}^{\infty} m_n)$ avec un domaine explicite $\mathbb{D}$ et $\forall F \in \mathbb{D}$,

$$\Gamma[F] = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n[F].$$

Application : Deux variables aléatoires $U_1 \in \mathbb{D}^p$ et $U_2 \in \mathbb{D}^m$ sont dites $\mathbb{D}$-indépendantes ssi

$$(U_1)_* S \otimes (U_2)_* S = (U_1, U_2)_* S.$$

C'est le cas des applications coordonnées d'une structure produit.

I_4 : Exemples de structures d'erreur

- **Sur $\mathbb{R}$ on les connaît bien (Théorème de Hamza)**

Structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m = \mathcal{N}(0,1), H^1(m), u \mapsto (u')^2).$$

- **Sur l'espace de Wiener**

La structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener $\mathcal{C} = (C_0([0,1], \mathbb{R}), \|\|_\infty)$ équipé de la mesure de Wiener ν :

$$S_{OU} = (\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \nu, \mathbb{D}_{OU}, \Gamma_{OU})$$

avec pour $F = f(\lambda_1, .., \lambda_n)$ cylindrique régulière,

$$\Gamma_{OU}[F] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \;\; < \lambda_i, \lambda_j >_{L^2([0,1],dx)} .$$

I_5 Problème de l'identification

Comment obtenir concrètement des structures d'erreur associées à l'observation d'un phénomène ?

• **En dimension finie :** Les structures d'erreur sont solidement reliées aux statistiques paramétriques via la notion **d'information de Fisher**.

Cf : *N.Bouleau et Ch.Chorro, "Error structure and parameter estimation", note C.R.A.S, Février 2004.*

• **En dimension infinie** qui est typiquement le cadre de la finance mathématique (Espace de Wiener), d'autres techniques doivent être mises en place : **Raffinement des théorèmes probabilistes :**

-Théorème de la limite centrale dans les espaces de Hilbert
-**Principe d'invariance de Donsker**
-Approximation du mouvement brownien par des séries de Fourier aléatoires

Le deuxième point pose un problème technique :

Donner une extension de la définition du domaine d'une forme de Dirichlet pour des variables à valeurs dans un espace de <u>dimension infinie.</u>

II Domaine vectoriel d'une forme de Dirichle

A] L'hypothèse (G), l'opérateur de dérivation

a) L'hypothèse (G)

On dira qu'une structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ vérifie la propriété (G) ssi il existe un espace de Hilbert séparable $(\mathcal{H}, \|\|_{\mathcal{H}})$ et un opérateur ∇ de $\mathbb{D}$ dans $L^2(m; \mathcal{H})$ tels que

$$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{D} \qquad \| \nabla \mathbf{X} \|_{\mathcal{H}}^{\mathbf{2}} = \mathbf{\Gamma}[\mathbf{X}].$$

Remarque : L'hypothèse est peu restrictive (Mokobovski).

b) L'opérateur de dérivation

Soient $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{m})$ une copie de $(W, \mathcal{W}, m)$ et J une isométrie entre $\mathcal{H}$ et $L^2((\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{m}))$ telle que $\forall h \in \mathcal{H}$, $\mathbb{E}_{\widehat{m}}[J(h)] = 0$, on définit l'opérateur de dérivation en posant $\forall U \in \mathbb{D}$,

$$\mathbf{U}^{\#} = \mathbf{J}(\nabla \mathbf{U}) \in \mathbf{L}^{\mathbf{2}}(\mathbf{m} \otimes \hat{\mathbf{m}}).$$

c) Un exemple

La structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener S_{OU} vérifie l'hypothèse (G) avec $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ et

$$\nabla_{\mathrm{OU}}\left[\int_0^1 \mathbf{h(s)dB_s}\right] = \mathbf{h}, \quad \forall\ \mathbf{h} \in \mathcal{H}.$$

De plus si l'on note $(\widehat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{B}(\mathcal{C})}, \widehat{\mu})$ une copie de $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu)$ et $(\widehat{B}_t)_{t\in[0,1]}$ le Brownien associé, un opérateur de dérivation est donné par

$$\left(\int_0^1 \mathbf{h(s)dB_s}\right)^{\#_{\mathrm{OU}}} = \int_0^1 \mathbf{h(s)d\hat{B}_s}.$$

La compatibilité de l'opérateur de dérivation $\#_{OU}$ avec le calcul d'Ito en fait un puissant outil de calcul d'erreurs notamment pour les solutions d'EDS et donc la finance.

Nicolas Bouleau, Error Calculus and Path Sensitivity in Financial Models, Mathematical finance 13, 115-134, 2003.

B] Le domaine vectoriel

Soit B un espace de Banach qui possède une base de Schauder. Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur qui vérifie la propriété (G).

But : Étendre la notion de domaine aux variables à valeurs dans B.

Définition :(Feyel-La Pradelle) On note $\mathbb{D}_B$ l'espace vectoriel des variables U de $L^2(m; B)$ telles qu'il existe g dans $L^2(m \otimes \widehat{m}; B)$ avec

$$\forall \lambda \in B', \; < \lambda, U > \in \mathbb{D} \quad et \quad < \lambda, U >^{\#} = < \lambda, g > .$$

On pose alors $g = U^{\#}$ et on équipe $\mathbb{D}_B$ de la norme

$$\| U \|_{\mathbb{D}_B} = \left(\| U \|^2_{L^2(m;B)} + \frac{1}{2} \| U^{\#} \|^2_{L^2(m \times \widehat{m};B)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

(Ainsi $\mathbb{D}_{\mathbb{R}} = \mathbb{D}$).

Certaines propriétés du domaine vont s'étendre au domaine vectoriel.

1) **Le calcul fonctionnel**

Proposition : Soit F une fonction Lipschitzienne de B dans $\mathbb{R}$.
a) Si $U \in \mathbb{D}_B$,

$$F(U) \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad \Gamma[F(U)] \leq K^2 \mathbb{E}_{\widehat{m}}[\| U^{\#} \|_B^2].$$

b) De plus si F est de classe C^1,

$$F(U)^{\#} = < F'(U), U^{\#} > . \quad (*)$$

Remarque : Si $B = \mathbb{R}^p$

$$(*) \Leftrightarrow F(U)^{\#} = \sum_{i=1}^{p} F_i'(U) U_i^{\#}$$

2) **Image d'une structure d'erreur par un élément du domaine vectoriel**

Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur et $U \in \mathbb{D}_B$. La forme bilinéaire

$$(C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip, (F, G) \mapsto \mathcal{E}[F(U), G(U)])$$

est fermable.

Sa plus petite extension fermée $(\mathbb{D}_U, \mathcal{E}_U)$ est une forme de Dirichlet locale ayant un opérateur carré du champ noté Γ_U.

La structure d'erreur

$$U_* S = (B, \mathcal{B}(B), U_* m, \mathbb{D}_U, \Gamma_U)$$

est appelée **l'image de $\mathbf{S}$ par $\mathbf{U}$ ou la $\mathbb{D}$-loi de $\mathbf{U}$**.

Exemple :

$$\boxed{\textbf{Les solutions d'EDS régulières sont dans } (\mathbb{D}_{\mathrm{OU}})_{\mathcal{C}}\textbf{.}}$$

En particulier si $h \in L^2([0,1])$,

$$\int_0^{\cdot} h(s)dB_s \in (\mathbb{D}_{OU})_{\mathcal{C}} \quad et \quad \left(\int_0^{\cdot} h(s)dB_s\right)^{\#} = \int_0^{\cdot} h(s)d\widehat{B}_s.$$

On note

$$S_{OU}^h = (\int_0^{\cdot} h(s)dB_s)_* S_{OU}$$

la structure dont la forme de Dirichlet $\mathcal{E}_{OU}^h$ vérifie $\forall F \in C^1(\mathcal{C},\mathbb{R}) \cap Lip$

$$\mathcal{E}_{OU}^h[F] = \int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{C}} \left\langle F'\left(\int_0^{\cdot} h(s)dB_s\right), \int_0^{\cdot} h(s)d\widehat{B}_s\right\rangle^2 d\mu d\widehat{\mu}.$$

C] Convergence en $\mathbb{D}$-loi

Définition : On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}_B$ converge en $\mathbb{D}$-loi si il existe une structure d'erreur $\tilde{S} = (B, \mathcal{B}(B), P, \tilde{\mathbb{D}}, \tilde{\Gamma})$ telle que :

i) $(U_n)_* m \to P$ en loi dans B,

ii) $C^1(B,\mathbb{R}) \cap Lip \subset \tilde{\mathbb{D}}$ et $\forall F \in C^1(B,\mathbb{R}) \cap Lip$, $\mathcal{E}[F(U_n)] \to \tilde{\mathcal{E}}[F]$.

• **Pour démontrer la convergence en loi de Dirichlet d'une suite** $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}_B$ **trois points sont à vérifier :**

$$\begin{cases} -\text{Étudier la convergence en loi de la suite } (U_n) \text{ vers } P \\ \\ -\forall F \in C^1(B,\mathbb{R}) \cap Lip, \text{ étudier la convergence de la suite } \mathcal{E}[F(U_n)] \\ \text{vers une limite notée } \tilde{\mathcal{E}}[F] \\ \\ -\text{Étudier la fermabilité de la pré-structure obtenue} \end{cases}$$

• **Cette notion est stable par les fonctions** C^1 **et Lip.**

Exemples :

- Si $\|U_n - U\|_{\mathbb{D}_B} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, (U_n) converge en $\mathbb{D}$-loi vers $U_* S$.

- Soient S vérifiant la propriété (G) et H un espace de Hilbert séparable.

Soit (U_n) une suite de variables dans $\mathbb{D}_H$, centrées, $\mathbb{D}$-indépendantes, de même $\mathbb{D}$-loi. Alors $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} U_k$ converge en loi de Dirichlet vers une structure d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck.

C. Chorro : On an extension of the central limit theorem to Dirichlet forms, *Cahiers de la mse, 2004.80, Univ. Paris 1, 2004.*

III Extensions du théorème de Donsker

Rappel : Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d définies sur un espace $(W, \mathcal{W}, P)$, centrées et réduites. On note $\forall t \in [0,1]$

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1}\right)$$

Le principe d'invariance de Donsker assure la converge en loi dans $\mathcal{C}$ de (X_n) vers la mesure de Wiener

On suppose ici que les U_k sont erronées (les erreurs étant modélisées par des structures d'erreur) en imposant une condition d'indépendance et d'équi-distribution pour les erreurs.

En d'autres termes : **les $\mathrm{U_k}$ sont les coordonnées de la structure produit**

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda, d, \gamma)^{\mathbb{N}^*}.$$

La structure $s = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda, d, \gamma)$ vérifiant $i \in d$, $\mathbb{E}_\lambda[i] = 0$, $\mathbb{E}_\lambda[i^2] = 1$ et $e[i] = 1$.

Ainsi les U_k sont des variables $\mathbf{i.i.d}$ sur W de loi λ (**centrées, réduites**) telles que $\mathbf{U_k} \in \mathbb{D}$ avec

$$\mathbf{\Gamma[U_n, U_m]} = \delta_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}\, \gamma[\mathbf{i}](\mathbf{U_n}).$$

$$\boxed{\textbf{Les } U_k \textbf{ sont } \mathbb{D}\textbf{-indépendantes de même } \mathbb{D}\textbf{-loi.}}$$

HYP : La structure s **vérifie la propriété (G)** et on note $'$ un opérateur de dérivation associé construit avec une copie $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathcal{B}(\mathbb{R})}, \widehat{\lambda})$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

On déduit classiquement un opérateur de dérivation $\#$ sur S en posant $\forall p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$\mathbf{F(U_1, \ldots, U_p)^{\#} = \sum_{k=1}^{p} F'_k(U_1, \ldots, U_p)\ i'(U_k, \widehat{U_k})},$$

les $(\widehat{U_k})$ étant les applications coordonnées de l'espace $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P}) = (\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathcal{B}(\mathbb{R})}, \widehat{\lambda})^{\mathbb{N}^*}$

On a alors le résultat naturel suivant (*N. Bouleau : Théorème de Donsker et Formes de Dirichlet, à paraître dans Bull.Scien.Math., 2005*)

Proposition : La suite de processus continus (X_n) converge en loi de Dirichlet vers S_{OU}

Preuve : Extension purement probabiliste du théorème de Donsker.

Nous allons étendre ce résultat à certaines familles d'intégrales stochastiques :

$$\begin{cases} \textbf{A]} \quad \int_0^{\cdot} h(s)dX_n(s), \; h \in L^2([0,1]) \\ \textbf{B]} \quad \int_0^{\cdot} K(s,.)dX_n(s), \; K \text{ \textbf{régulier}} \\ \textbf{C]} \quad \int_{[0,.]^p} h(x_1,\dots,x_p)dX_n(x_1)\dots dX_n(x_p), \; h \text{ \textbf{donnée par une multi-mesure}} \end{cases}$$

A] Convergence en loi de Dirichlet de $\int_0^{\cdot} \mathbf{h(s)dX_n(s)}$

Soit $h \in L^2([0,1])$, on note

$$Y_n^h(t) = \int_0^t h(s)dX_n(s) = \sqrt{n}\sum_{k=1}^{n} U_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s)I_{[0,t]}(s)ds.$$

Proposition : La suite de processus continus (Y_n^h) converge en loi de Dirichlet vers $S_{OU}^h = (\int_0^{\cdot} h(s)dB_s)_* S_{OU}$

Preuve :

a) Convergence en loi dans $\mathcal{C}$

X_n étant une semi-martingale continue deux conditions existent dans la littérature en fonction de la régularité de h

- Si h est càd-làg, **condition U.T** de Jakubowski, Mémin et Pagès.
- Si h quelconque, convergence de X_n vers B. pour la distance en variations.

Bien que très simple notre problème sort de ce cadre $\Rightarrow$ Étude directe

On suppose h continue puis on raisonne par approximation dans $L^2([0,1])$.

On définit

$$\widetilde{Y_n^h}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} h\left(\frac{k}{n}\right) U_k + (nt - [nt]) h\left(\frac{[nt]+1}{n}\right) U_{[nt]+1} \right).$$

On a $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(\|\widetilde{Y_n^h} - Y_n^h\|_\infty > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La convergence en loi de $\widetilde{Y_n^h}$ vers $Y^h = \int_0^\cdot h(s)dB_s$ est une conséquence du principe d'invariance fonctionnel de **Lindeberg-Feller** (*D. Dacunha-Castelle, M. Duflo*).

Remarque : Si l'on prend $h = I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ on a $\widetilde{Y_n^h} = 0$ et $Y_n^h = X_n$.

Pour $h \in L^2([0,1])$, soit g une fonction continue telle que $\|h-g\|_{L^2([0,1])} \leq \varepsilon$ et $h \geq g$ et $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne et bornée.

$$\mathbb{E}[\Phi(Y_n^h) - \Phi(Y^h)] = \underbrace{\mathbb{E}[\Phi(Y_n^h) - \Phi(Y_n^g)]}_{(1)} + \underbrace{\mathbb{E}[\Phi(Y_n^g) - \Phi(Y^g)]}_{(2)} + \underbrace{\mathbb{E}[\Phi(Y^g) - \Phi(Y^h)]}_{(3)}.$$

(3) : **Inégalité de Doob**

(1) : **Monotonie par morceaux et inégalité de Doob**.

(2) : **Résultat précédent.**

Remarque : Le résultat de convergence précédent se généralise pour des variables (U_k) à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

b) Étude de la suite $\mathcal{E}[F(Y_n^h)]$

Le processus Y_n^h est dans $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ avec

$$(Y_n^h)^{\#}(t) = \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} U_k^{\#} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) I_{[0,t]}(s) ds.$$

Ainsi, le calcul fonctionnel généralisé donne pour $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$\mathcal{E}[F(Y_n^h)] = \int_W \int_{\widehat{W}} < F'(Y_n^h), (Y_n^h)^{\#} >^2 d\widehat{P} dP = \int_W \int_{\widehat{W}} \phi\left(Y_n^h, (Y_n^h)^{\#}\right) d\widehat{P} dP$$

où ϕ est **continue et sous quadratique.**

Les $(U_k, (U_k)^\#)$ étant par construction une suite de variables $i.i.d$, centrées et de matrice de covariance $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$(Y_n^h, (Y_n^h)^\#) \underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} (\int_0^\cdot h(s)dB_s, \int_0^\cdot h(s)d\widehat{B}_s).$$

<u>Si</u> la convergence en loi précédente s'étend aux fonctions continues sous quadratiques on a

$$\mathcal{E}[F(Y_n^h)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{C}} \left\langle F'\left(\int_0^\cdot h(s)dB_s\right), \int_0^\cdot h(s)d\hat{B}_s \right\rangle^2 d\mu d\hat{\mu} = \mathcal{E}_{OU}^h[F]$$

où $\mathcal{E}_{OU}^h$ est la forme associée à la structure d'erreur $S_{OU}^h = (\int_0^\cdot h(s)dB_s)_* S_{OU}$.

Proposition : Soit $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathcal{C}$, $|\phi(x)| \leq K(1 + \|x\|_\infty^2)$ on a

$$\mathbb{E}_P[\phi(Y_n^h)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_\mu[\phi(Y^h)].$$

Preuve : Il suffit de montrer **l'équi-intégrabilité** des variables $\|Y_n^h\|_\infty^2$. On suppose $h \geq 0$, on s'intéresse à la quantité

$$A_{n,\alpha} = \mathbb{E}_P[\|Y_n^h\|_\infty^2 I_{\{\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq \alpha\}}].$$

D'après Fubini

$$A_{n,\alpha} = \alpha P(\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq \alpha) + \int_\alpha^\infty P(\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq t)dt.$$

Comme $h \geq 0$, les trajectoires de Y_n^h sont **monotones par morceaux** et donc

$$\|Y_n^h\|_\infty = \sqrt{n} \underset{1\leq k\leq n}{Max} \left| \sum_{j=1}^k U_j \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} h(s)ds \right|.$$

Nous devons donc gérer le terme

$$\mathbf{P}(\|\mathbf{Y_n^h}\|_\infty^2 \geq \mathbf{t}) \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{Y_n^h}\|_\infty = \sqrt{n}\underset{\mathbf{1\leq k\leq n}}{\mathbf{Max}}\left|\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{k}} \mathbf{U_j} \int_{\frac{\mathbf{j-1}}{\mathbf{n}}}^{\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{n}}} \mathbf{h(s)ds}\right|.$$

Lemma : (Billingsley p.69) Let $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ be independent random variables with variances $(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$. Denote $\forall 1 \leq i \leq n$, $s_i^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_i^2$ and $S_i = \xi_1 + \ldots + \xi_i$, thus $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$P\left(\underset{1\leq i\leq n}{Max}|S_i| \geq \lambda s_n\right) \leq 2P(|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2})s_n)..$$

Ainsi

$$P(\|Y_n^h\|_\infty^2 \geq t) \leq 2P\left(\left|Y_n^h(1)\right| \geq \sqrt{t} - \sqrt{2s_n^2}\right)$$

où $s_n^2 = n\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s)ds\right]^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 h^2(s)d(s)$.

$$A_{n,\alpha} \leq \underbrace{2\alpha P\left(|Y_n^h(1)| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} - \sqrt{2s_n^2}\right)}_{*} + \underbrace{2\mathbb{E}_P\left[\left(\left[Y_n^h(1) + \sqrt{2s_n^2}\right]^2 - \alpha\right)_+\right]}_{**}.$$

$*$ D'après le théorème de Dini, si N suit une loi normale centrée réduite

$$\alpha P\left(|Y_n^h(1)| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} - \sqrt{2s_n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha P\left(|N| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\int_0^1 h^2(s)d(s)}} - \sqrt{2}\right).$$

$**$ De plus comme les variables $\left(Y_n^h(1)\right)^2$ sont équi-intégrables (par indépendance des U_k)

$$\mathbb{E}_P\left[\left(\left[Y_n^h(1) + \sqrt{2s_n^2}\right]^2 - \alpha\right)_+\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_P\left[\left(\int_0^1 h^2(s)ds\ [N + \sqrt{2}]^2 - \alpha\right)_+\right]$$

et donc

$$\underset{n}{lim}\ sup\ A_{n,\alpha} \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 0.\square$$

B] Approximation de processus gaussien généraux

Soit $(Y^K(t))_{t\in[0,1]}$ un processus gaussien continu de la forme

$$Y^K(t) = \int_0^1 K(t,s)dB_s,$$

le noyau $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :

i) K est mesurable et $K(0,r) = 0$, $r \in [0,1]$.

ii) Il existe une fonction $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue et croissante et un réel $\alpha > 0$ tels que pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$

$$\int_0^1 (K(t_2,r) - K(t_1,r))^2 dr \leq (G(t_2) - G(t_1))^\alpha.$$

Remarque : C'est le cas en particulier du **mouvement brownien fractionnaire** de paramètre de Hurst $0 < H < 1$ ou du **processus d'Ornstein-Uhlenbeck.**

R. Delgado, M. Jolis : Weak approximation for a class of gaussian processes, J. Appl. Prob 37, 400-407, 2000.

On s'interresse ici à la convergence en loi de Dirichlet du processus continu $\mathbf{Y_n^K = \int_0^1 K(.,s)dX_n(s)}$.

Proposition : Si le noyau K vérifie les hypothèses $i)$ et $ii)$ et si $(U_1, U_1^{\#}) \in L^p(W) \times L^p(W \otimes \widehat{W})$ avec $p > \frac{2}{\alpha} \vee 2$ alors le processus Y_n^K converge en loi de Dirichlet vers $(Y^K)_* S_{OU}$.

Preuve :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{Convergence en loi de } Y_n^K \\ \\ -\text{Calcul fonctionnel généralisé} \\ \\ -\text{Équi-intégrabilité de } \| Y_n^K \|_\infty^2 \end{array} \right.$$

C] Intégrales multiples données par une multi-mesure

Une remarque : Si h est suffisamment régulière (à variations bornées, continue à droite),

$$\boxed{\mathbf{X_n} \overset{\mathbb{D}-\text{loi}}{\longrightarrow} \mathbf{S_{OU}} \Rightarrow \int_0^{\cdot} \mathbf{h(s)dX_n(s)} \overset{\mathbb{D}-\text{loi}}{\longrightarrow} (\int_0^{\cdot} \mathbf{h(s)dB_s})_* \mathbf{S_{OU}}.}$$

Par I.P.P,

$$\int_0^t h(s)dX_n(s) = \int_0^t X_n(s)d\bar{\nu}_t(s) = \phi_h(X_n)$$

où $\phi_h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est $\mathbf{C^1}$ **et lipschitzienne**.

$$\boxed{\textbf{Ainsi } \phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{X_n}) \textbf{ converge en loi de Dirichlet vers } \phi_{\mathbf{h}\ *}\mathbf{S_{OU}}.}$$

Or d'après la formule d'Ito

$$\int_0^t h(s)dB_s = \int_0^t B_s d\bar{\nu}_t(s) \text{ donc } \phi_{h\ *}S_{OU} = \left(\int_0^{\cdot} h(s)dB_s\right)_* S_{OU}.$$

On s'interresse alors à la convergence en loi de Dirichlet de

$$\int_{[0,t]^p} \mathbf{h}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_p}) \mathbf{dX_n}(\mathbf{x_1}) \ldots \mathbf{dX_n}(\mathbf{x_p}). \qquad (*)$$

lorsque h **est régulière.**

Bardina et Jolis ont abordé la convergence en loi de (*) en étudiant le prologement continu à $\mathcal{C}$ de l'application

$$\phi_h : \eta \in C.M \mapsto \int_{[0,.]^p} h(x_1, \ldots, x_p) d\eta(x_1) \ldots d\eta(x_p) \in \mathcal{C},$$

X. Bardina, M. Jolis : Weak convergence to the multiple Stratonovich integral, Sto. Proc. Appl, 90, 277-300, 2000.

Ceci nécessite la notion de multi-mesure.

Définition : Une application $\nu : (\mathcal{B}([0,1]))^p \to \mathbb{R}$ est appelée une multi-mesure si $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\forall (A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_p) \in (\mathcal{B}([0,1]))^{p-1}$, l'application

$$A \in \mathcal{B}([0,1]) \mapsto \nu(A_1, \ldots, A_{i-1}, A, A_{i+1}, \ldots, A_p)$$

est une mesure signée. On dit de plus que h est donnée par la multi-mesure ν si

$$h(x_1, \ldots, x_p) = \nu([x_1, 1], \ldots, [x_p, 1]).$$

Proposition : *(Bardina-Jolis)* Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) ϕ_h possède une extension continue sur $\mathcal{C}$.

b) La fonction h est donnée par une multi-mesure symétrique ν.

De plus l'extension de ϕ_h est telle que $\forall \eta \in \mathcal{C}$

$$\phi_h(\eta) = \int_{[0,t]^p} \eta(x_1)\dots\eta(x_p)d\bar{\nu}_t(x_1,\dots,x_n)$$

où la famille $(\bar{\nu}_t)_{t\in[0,1]}$ vérifie

$$\|\bar{\nu}_t\|_{FV} \leq \|\nu\|_{FV}.$$

Ainsi **lorsque h est donnée par une multi-mesure**

$$\int_{[0,t]^p} \mathbf{h}(\mathbf{x_1},\dots,\mathbf{x_p})\mathbf{dX_n}(\mathbf{x_1})\dots\mathbf{dX_n}(\mathbf{x_p}) = \phi_\mathbf{h}(\mathbf{X_n})$$

où $\phi_h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et de **classe $\mathbf{C^1}$** et vérifie

$$|\phi_\mathbf{h}(\mathbf{x})| \leq \|\nu\|_\mathbf{FV}\ \|\mathbf{x}\|_\infty^\mathbf{p},$$

$$|\phi'_\mathbf{h}(\mathbf{x})[\tilde{\mathbf{x}}]| \leq \mathbf{p}\ \|\nu\|_\mathbf{FV}\ \|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty\ \|\mathbf{x}\|_\infty^{\mathbf{p-1}}.$$

$\boxed{\textbf{Première conséquence :}\ \phi_h(X_n) \text{ convergence en loi dans } \mathcal{C} \text{ vers } \phi_h(B).}$

Pour l'étude de la convergence en loi de Dirichlet de $\phi_h(X_n)$ deux points restent à étudier :

• $\phi_h(X_n) \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}}$?

•• Étude de la convergence de $\mathcal{E}[F(\phi_h(X_n))]$, $\forall F \in C^1 \cap Lip$ et identification de la structure limite.

• Pour le premier point on a l'extension suivante du calcul fonctionnel

Proposition : Soient $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ vérifiant (G) et $X \in \mathbb{D}_B$. $\forall F \in C^1(B, \mathbb{R})$ telle que $|F(x)| \leq K\|x\|_B^p$ et $\|F'(x)\| \leq K\|x\|_B^{p-1}$ on a

$$\begin{cases} \|X\|_B \in L^{2p}(W) \\ \\ \|X^\#\|_B \in L^{2p}(W \otimes \hat{W}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F(X) \in \mathbb{D} \\ \\ F(X)^\# = F'(X)[X^\#] \end{cases}$$

$$\textbf{Conséquences :} \begin{cases} -\text{Si} \quad (U_k, U_k^\#) \in L^{2p}(W) \times L^{2p}(W \otimes \hat{W}) \text{ alors } \phi_h(X_n) \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}} \\ \\ -\phi_h \in (S_{OU})_{\mathcal{C}} \end{cases}$$

On suppose $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1^\#) \in \mathbf{L}^{2p}(\mathbf{W}) \times \mathbf{L}^{2p}(\mathbf{W} \otimes \hat{\mathbf{W}})$, on peut donc étudier la convergence en loi de Dirichlet de $\phi_h(X_n)$. La limite sera $(\phi_h)_* S_{OU}$.

•• Soit $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$, le calcul fonctionnel donne

$$\mathcal{E}[F(\phi_h(X_n))] = \int_W \int_{\hat{W}} \Phi(X_n, X_n^{\#}) dP d\hat{P}$$

où $\Phi : \mathcal{C}^2 \to \mathbb{R}$ est continue vérifiant

$$|\Phi(x,y)| \leq K\|x\|_\infty^{2(p-1)} \|y\|_\infty^2 \leq K max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)^{2p}.$$

On a le lemme suivant

Lemme : Soit $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathcal{C}$, $|\phi(x)| \leq K(1 + \|x\|_\infty^q)$. Lorsque $U_1 \in L^q(W)$

$$\mathbb{E}_P[\Phi(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_\mu[\Phi].$$

et donc

Proposition : Si $\mathbf{h} : \mathbb{R}^{\mathbf{p}} \to \mathbb{R}$ est donnée par une multi-mesure et si $(\mathbf{U_1}, \mathbf{U_1^{\#}}) \in \mathbf{L^{2p}(W)} \times \mathbf{L^{2p}(W \otimes \hat{W})}$ alors $\phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{X_n})$ converge en loi de Dirichlet vers $\phi_{\mathbf{h}}\ {}_*\mathbf{S_{OU}}$

Conclusion et perspectives

• Adaptation possible de ces résultats dans le cadre du théorème de Lindeberg-Feller fonctionnel.

• Structure d'Ornstein Uhlenbeck sur l'espace de Wiener comme objet limite.

• Généralisation de ces résultats pour les EDS ? ? ? (On sort du cadre de la littérature de référence).