Calcul d'erreur par formes de Dirichlet :

quelques résultats asymptotiques.

Christophe Chorro (Université Paris 1)

31 Mars 2006

Plan de l'exposé

I) Approche intuitive et outil d'extension

1) Propagation des petites erreurs : Notion heuristique de structure d'erreur

2) Un outil d'extension : Le langage des Formes de Dirichlet

3) Exemples

4) Notion d'image et de produits infinis

5) Identification des structures d'erreur

II) Domaine vectoriel d'une forme de Dirichlet

III) Théorèmes limites

I_1 : Notion intuitive de structure d'erreur

Considérons une grandeur $\mathbf{C}$ réelle entachée d'une erreur $\mathbf{\Delta C}$.

- On suppose le couple $(\mathbf{C}, \mathbf{\Delta C})$ aléatoire $\Rightarrow$ Richesse du langage probabiliste
- Phénomène de propagation de l'erreur : **Erreur sur $\mathbf{f(C)}$**.

Approche mixte

$\mathbf{H_1}$: On suppose $\mathbf{var}[\mathbf{\Delta C} \mid \mathbf{C}]$ connue et $\mathbb{E}[\mathbf{\Delta C} \mid \mathbf{C}] = \mathbf{0}$.

$\mathbf{H_2}$: Erreurs petites : $\mathbf{\Delta C} = \varepsilon \mathbf{Y}$ ($\mathbf{Y}$ bornée, ε paramètre de calibration).

L'étude de la propagation se simplifie.

Soit f_1 une fonction régulière. On a

$$\Delta(f_1(C)) = f_1(C+\Delta C) - f_1(C) = f_1'(C)\Delta C + \frac{1}{2} f_1''(C)(\Delta C)^2 + \varepsilon^3\ 0(1)$$

on déduit

$$\mathbf{var}[\mathbf{\Delta f_1(C)} \mid \mathbf{C}] = \mathbf{f_1'^2(C) var}[\mathbf{\Delta C} \mid \mathbf{C}] + \varepsilon^{\mathbf{3}}\ \mathbf{0(1)}$$

et

$$\mathbb{E}[\mathbf{\Delta f_1(C)} \mid \mathbf{C}] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{f_1''(C) var}[\mathbf{\Delta C} \mid \mathbf{C}] + \varepsilon^{\mathbf{3}}\ \mathbf{0(1)}.$$

Notations :

- $g_n = f_n o \dots o f_1$, $g_0 = Id$
- $b_n = \mathbb{E}[\Delta g_n(C) \mid C]$, $\sigma_n^2 = \mathbf{var}[\mathbf{\Delta g_n(C)} \mid \mathbf{C}]$
- $x_n = g_n(C)$

$$\boxed{\begin{gathered} \sigma_{\mathbf{n}}^{\mathbf{2}} = (\mathbf{f_n'})^{\mathbf{2}}[\mathbf{x_{n-1}}]\ \sigma_{\mathbf{n-1}}^{\mathbf{2}} + \varepsilon^{\mathbf{3}}\ \mathbf{0(1)} \\ \mathbf{b_n} = \mathbf{f_n'}[\mathbf{x_{n-1}}]\ \mathbf{b_{n-1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \mathbf{f_n''}[\mathbf{x_{n-1}}]\ \sigma_{\mathbf{n-1}}^{\mathbf{2}} + \varepsilon^{\mathbf{3}}\ \mathbf{0(1)}. \end{gathered}}$$

• Définition heuristique

Notons

$$\mathbf{\Gamma^C[f,g](x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{covar[\Delta f(C), \Delta g(C) \mid C = x]}{\varepsilon^2}}.$$

- $\mathbf{\Gamma^C}$ est bilinéaire, symétrique, positif.
- Si $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est régulière,

$$\Gamma^C[F(f,g)] = (F_1')^2(f,g)\Gamma^C[f] + (F_2')^2(f,g)\Gamma^C[g] + 2F_1'(f,g)F_2'(f,g)\Gamma^C[f,g].$$

Loi de propagation de Gauss (1821)

$(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \text{loi de } \mathrm{C}, \Gamma^{\mathrm{C}})$ **est appelé une structure d'erreur**.

- **Avantage : Cohérence**

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{F = f\ o\ g} \\ \mathbf{F = f_1\ o\ g_1}\end{array}\right. \Rightarrow \text{même erreur sur } \mathbf{F}$$

- **Limite : Pas d'extension possible**

$$\mathbf{F} \text{ (régulière), erreurs sur } (\mathbf{C_1}, ..., \mathbf{C_n}, ...)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{erreur sur } \mathbf{F(C_1, ...C_n)}$$

$$\text{Que dire lorsque } \left\{\begin{array}{l}\mathbf{F} \text{ est définie par une limite} \\ \mathbf{F} \text{ dépend d'une infinité de } (\mathbf{C_1}, .., \mathbf{C_n}, ..)\end{array}\right.$$

I_2 : Le langage des formes de Dirichlet

Une structure d'erreur $(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ est un espace de probabilité équipé d'un opérateur $\mathbf{\Gamma} : \mathbb{D}^2 \to \mathbf{L}^1(\mathbf{m})$ bilinéaire, symétrique, positif vérifiant :

0) $\mathbb{D}$ sous-espace vectoriel dense de $\mathbf{L}^2(\mathbf{m})$

1) Le calcul de Gauss de classe $C^1 \cap Lip$:
si $U = (U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{D}^n$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap Lip$ alors $F(U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{D}$ et

$$\mathbf{\Gamma[F(U), F(U)] = \sum_{i,j=1}^{n} F'_i(U) F'_j(U) \Gamma[U_i, U_j]}$$

2) $1 \in \mathbb{D}$, $\Gamma[1, 1] = 0$.

3) La forme bilinéaire définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ par

$$\mathcal{E}[F, G] = \frac{1}{2} \int_W \Gamma[F, G] dm$$

est **fermée** i.e $\mathbb{D}$ muni de $\| \, . \, \|_{\mathbb{D}} = (\| \, . \, \|^2_{L^2(m)} + \mathcal{E}[.])^{\frac{1}{2}}$ est complet.

On notera $\mathbf{\Gamma[V] := \Gamma[V, V]}$.

AVANTAGES

• **Extension naturelle** de l'approche heuristique (propriété 1)

• **Souplesse technique** (Image, produits)

• La propriété (3) assure un calcul fonctionnel sur les fonctions Lip avec, lorsque F est contractante,

$$\Gamma[F(U)] \leq \Gamma[U].$$

• **Possibilité d'un calcul de biais** : on peut associer de manière unique à $\mathcal{E}$ un opérateur auto-adjoint A de domaine $D(A) \subset \mathbb{D}$ tel que

$$A[F(U)] = F'(U)A[U] + \frac{1}{2}F''(U)\Gamma[U]$$

lorsque $U \in D(A)$, $\Gamma[U] \in L^2(m)$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 avec des dérivées bornées.

I_3 : Exemples de structures d'erreur

- **Sur $\mathbb{R}$ on les connaît bien (Théorème de Hamza)**

Structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m = \mathcal{N}(0,1), H^1(m), u \mapsto (u')^2).$$

- **Sur l'espace de Wiener**

La structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener $\mathcal{C} = (C_0([0,1], \mathbb{R}), \|\|_\infty)$ équipé de la mesure de Wiener μ :

$$S_{OU} = (\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu, \mathbb{D}_{OU}, \Gamma_{OU})$$

avec pour $F = f(\lambda_1, .., \lambda_n)$ cylindrique régulière,

$$\Gamma_{OU}[F] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ < \lambda_i, \lambda_j >_{L^2(\mu)} .$$

I_4 : Image et Produits infinis

• Structure image

Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur et $U \in \mathbb{D}^d$. La forme bilinéaire

$$(C^1(\mathbb{R}^d) \cap Lip, (F,G) \mapsto \mathcal{E}[F(U), G(U)])$$

est fermable.

Sa plus petite extension fermée $(\mathbb{D}_U, \mathcal{E}_U)$ est une forme de Dirichlet locale ayant un opérateur carré du champ noté Γ_U.

La structure d'erreur

$$U_* S = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_* m, \mathbb{D}_U, \Gamma_U)$$

est appelée **l'image de $\mathbf{S}$ par $\mathbf{U}$** ou la **$\mathbb{D}$-loi de $\mathbf{U}$**.

Exemple : On prend

$$S = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m = \mathcal{N}(0,1), H^1(m), u \mapsto (u')^2)$$

et

$$F = m(]-\infty, .]) \in H^1(m).$$

Alors

$$F_*S = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx, \mathbb{D}_F, \Gamma_F)$$

est la structure d'erreur **pseudo-gaussienne** sur $[0,1]$, elle vérifie pour f régulière

$$\Gamma_F[f] = \frac{1}{2\pi} e^{-(F^{-1})^2} f'^2.$$

• Produits infinis

Soit $S_n = (W_n, \mathcal{W}_n, m_n, \mathbb{D}_n, \Gamma_n)$, $n \geq 0$, une famille de structures d'erreur. On définit la structure produit

$$(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma) = \prod_{n=0}^{\infty} S_n$$

où

- $(W, \mathcal{W}, m) = (\prod_{n=0}^{\infty} W_n, \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n, \otimes_{n=0}^{\infty} m_n)$
- $\mathbb{D}$ explicite
- $\forall F \in \mathbb{D}$, $\Gamma[F] = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n[F]$.

Application : Deux variables aléatoires $U_1 \in \mathbb{D}^p$ et $U_2 \in \mathbb{D}^m$ sont dites $\mathbb{D}$-indépendantes ssi

$$(U_1)_* S \otimes (U_2)_* S = (U_1, U_2)_* S.$$

C'est le cas des applications coordonnées d'une structure produit.

I_5 Problème de l'identification

Comment obtenir concrètement des structures d'erreur associées à l'observation d'un phénomène ?

• **En dimension finie :** Les structures d'erreur sont solidement reliées aux statistiques paramétriques via la notion **d'information de Fisher**.

Cf : *N.Bouleau et Ch.Chorro, "Error structure and parameter estimation", note C.R.A.S, Février 2004.*

• **En dimension infinie** d'autres techniques doivent être mises en place : **Raffinement des théorèmes probabilistes :**

$$\begin{cases} \text{-Théorème de la limite centrale dans les espaces de Hilbert} \\ \text{-Principe d'invariance de Donsker} \\ \text{-Approximation du mouvement brownien par des séries de Fourier aléatoires} \end{cases}$$

Le deuxième point pose un problème technique :

Donner une extension de la définition du domaine d'une forme de Dirichlet pour des variables à valeurs dans un espace de <u>dimension infinie.</u>

II Domaine vectoriel

A] L'hypothèse (G), l'opérateur de dérivation

a) L'hypothèse (G)

Une structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ vérifie (G) ssi il existe un Hilbert séparable $(\mathcal{H}, \|\|_{\mathcal{H}})$ et un opérateur $\nabla : \mathbb{D} \to L^2(m; \mathcal{H})$ tels que $\forall X \in \mathbb{D}$,

$$\| \nabla \mathbf{X} \|_{\mathcal{H}}^{2} = \mathbf{\Gamma}[\mathbf{X}].$$

b) L'opérateur de dérivation

Soient $(\hat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \hat{m})$ une copie de $(W, \mathcal{W}, m)$ et $J : \mathcal{H} \to L^2(\hat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \hat{m})$ une isométrie centrée ($\mathbb{E}_{\hat{m}}[J(h)] = 0$). On pose $\forall U \in \mathbb{D}$,

$$\mathbf{U}^{\#} = \mathbf{J}(\nabla \mathbf{U}) \in \mathbf{L}^{2}(\mathbf{m} \otimes \hat{\mathbf{m}}).$$

Remarques $\left\{\begin{array}{l} \text{- L'hypothèse (G) est peu restrictive (Mokobodski)} \\ \text{- Chain rule} \\ \text{- Compatibilité avec le produit de structures d'erreur} \end{array}\right.$

c) Un exemple

La structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener S_{OU} vérifie l'hypothèse (G) avec $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ et $\forall h \in \mathcal{H}$,

$$\underbrace{\nabla_{\mathbf{OU}} \left[\int_0^1 \mathbf{h(s) dB_s} \right] = \mathbf{h}}_{\text{Gradient de Malliavin}} .$$

De plus si l'on note $(\hat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{B}(\mathcal{C})}, \hat{\mu})$ une copie de $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu)$ et $(\hat{B}_t)_{t\in[0,1]}$ le Brownien associé, un opérateur de dérivation est donné par

$$\left(\int_0^1 \mathbf{h(s) dB_s} \right)^{\#_{\text{OU}}} = \int_0^1 \mathbf{h(s) d\hat{B}_s}.$$

B] Le domaine vectoriel

Soient B un espace de Banach séparable et $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ vérifiant (G).

But : Étendre la notion de domaine aux variables à valeurs dans B.

Définition :(Feyel-La Pradelle) On note $\mathbb{D}_B$ l'espace vectoriel des variables $U \in L^2(m; B)$ telles qu'il existe $g \in L^2(m \otimes \widehat{m}; B)$ avec

$$\forall \lambda \in B',\ < \lambda, U > \in \mathbb{D} \quad et \quad < \lambda, U >^{\#} = < \lambda, g > .$$

On pose alors $g = U^{\#}$ et on équipe $\mathbb{D}_B$ de la norme

$$\| U \|_{\mathbb{D}_B} = \left(\| U \|^2_{L^2(m;B)} + \frac{1}{2} \| U^{\#} \|^2_{L^2(m \times \widehat{m};B)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

(Ainsi $\mathbb{D}_{\mathbb{R}} = \mathbb{D}$).

Lorsque B possède une base de Schauder les propriétés du domaine s'étendent au domaine vectoriel.

1) **Le calcul fonctionnel**

Proposition : Soit F une fonction Lipschitzienne de B dans $\mathbb{R}$.
a) Si $U \in \mathbb{D}_B$,

$$F(U) \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad \Gamma[F(U)] \leq K^2 \mathbb{E}_{\widehat{m}}[\| U^{\#} \|_B^2].$$

b) De plus si F est de classe C^1,

$$F(U)^{\#} = < F'(U), U^{\#} > . \quad (*)$$

Remarque : Si $B = \mathbb{R}^p$

$$(*) \Leftrightarrow F(U)^{\#} = \sum_{i=1}^{p} F_i'(U) U_i^{\#}$$

2) **Image d'une structure d'erreur par un élément du domaine vectoriel**

Soit $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur et $U \in \mathbb{D}_B$. La forme bilinéaire

$$(C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip, (F, G) \mapsto \mathcal{E}[F(U), G(U)])$$

est fermable.

Sa plus petite extension fermée $(\mathbb{D}_U, \mathcal{E}_U)$ est une forme de Dirichlet locale ayant un opérateur carré du champ noté Γ_U.

La structure d'erreur

$$U_* S = (B, \mathcal{B}(B), U_* m, \mathbb{D}_U, \Gamma_U)$$

est appelée **l'image de $\mathbf{S}$ par $\mathbf{U}$ ou la $\mathbb{D}$-loi de $\mathbf{U}$**.

Exemple :

$$\boxed{\textbf{Les solutions d'EDS régulières sont dans } (\mathbb{D}_{\mathrm{OU}})_{\mathcal{C}}\textbf{.}}$$

En particulier si $h \in L^2([0,1])$,

$$\int_0^{\cdot} h(s)dB_s \in (\mathbb{D}_{OU})_{\mathcal{C}} \quad et \quad \left(\int_0^{\cdot} h(s)dB_s\right)^{\#} = \int_0^{\cdot} h(s)d\widehat{B}_s.$$

On note

$$S_{OU}^h = (\int_0^{\cdot} h(s)dB_s)_* S_{OU}$$

la structure dont la forme de Dirichlet $\mathcal{E}_{OU}^h$ vérifie $\forall F \in C^1(\mathcal{C},\mathbb{R}) \cap Lip$

$$\mathcal{E}_{OU}^h[F] = \int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{C}} \left\langle F'\left(\int_0^{\cdot} h(s)dB_s\right), \int_0^{\cdot} h(s)d\widehat{B}_s\right\rangle^2 d\mu d\widehat{\mu}.$$

C] Convergence en $\mathbb{D}$-loi

Définition : On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans B converge en $\mathbb{D}$-loi si

• 0) $\forall C^1(B,\mathbb{R}) \cap Lip$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F(U_n) \in \mathbb{D}$

il existe une structure d'erreur $\tilde{S} = (B, \mathcal{B}(B), P, \tilde{\mathbb{D}}, \tilde{\Gamma})$ telle que :

• i) $(U_n)_* m \to P$ en loi dans B,

• ii) $C^1(B,\mathbb{R}) \cap Lip \subset \tilde{\mathbb{D}}$ et $\forall F \in C^1(B,\mathbb{R}) \cap Lip$, $\mathcal{E}[F(U_n)] \to \tilde{\mathcal{E}}[F]$.

• **Pour démontrer la convergence en loi de Dirichlet d'une suite** $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}_B$ **trois points sont à vérifier :**

$$\begin{cases} -\text{Étudier la convergence en loi de la suite } (U_n) \text{ vers } P \\[1em] -\forall F \in C^1(B,\mathbb{R}) \cap Lip,\ \text{étudier la convergence de la suite } \mathcal{E}[F(U_n)] \\ \text{vers une limite notée } \tilde{\mathcal{E}}[F] \\[1em] -\text{Existence de } \tilde{S} \end{cases}$$

• **Cette notion est stable par les fonctions** C^1 **et Lip.**

Exemples :

- Si $\|U_n - U\|_{\mathbb{D}_B} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, (U_n) converge en $\mathbb{D}$-loi vers $U_* S$.

- Soient S vérifiant la propriété (G) et H un espace de Hilbert séparable.

Soit (U_n) une suite de variables dans $\mathbb{D}_H$, centrées, $\mathbb{D}$-indépendantes, de même $\mathbb{D}$-loi. Alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} U_k$ converge en loi de Dirichlet vers une structure d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck.

C. Chorro : On an extension of the central limit theorem to Dirichlet forms, *Cahiers de la mse, 2004.80, Univ. Paris 1, 2004.*

III Théorèmes limites

A] Théorème de Donsker

Rappel : Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d définies sur un espace $(W, \mathcal{W}, P)$, centrées et réduites. On note $\forall t \in [0,1]$

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1}\right)$$

Le principe d'invariance de Donsker assure la converge en loi dans $\mathcal{C}$ de (X_n) vers la mesure de Wiener

On suppose ici que les U_k sont erronées (les erreurs étant modélisées par des structures d'erreur) en imposant une condition d'indépendance et d'équi-distribution pour les erreurs.

On a alors le résultat naturel suivant (*N. Bouleau, Théorème de Donsker et formes de Dirichlet, Bull. Sci. Math.* **129** *(2005), no. 5, 369–380*)

Proposition : La suite de processus continus (X_n) converge en loi de Dirichlet vers S_{OU}

Preuve : Extension purement probabiliste du théorème de Donsker.

Nous avons étendu ce résultat à certaines familles d'intégrales stochastiques :

$$\begin{cases} \textbf{1]} \quad \int_0^{\cdot} \mathbf{h(s)dX_n(s),\ h \in L^2([0,1])} \\ \textbf{2]} \quad \int_0^{\cdot} \mathbf{K(s,.)dX_n(s),\ K} \textbf{ régulier} \\ \textbf{3]} \quad \int_{[0,.]^p} \mathbf{h(x_1,\ldots,x_p)dX_n(x_1)\ldots dX_n(x_p),\ h} \textbf{ donnée par une multi-mesure} \end{cases}$$

C. Chorro : Convergence in Dirichlet law of certain stochastic integrals, Electron. J. Probab. **10** *(2005), 1005-1025.*

B] Séries aléatoires gaussiennes

Notations

• $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ applications coordonnées de $(W,\mathcal{W},P) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathcal{N}(0,1))^{\mathbb{N}}$

• $(\mathcal{C} = C_0([0,1],\mathbb{R}), \|\|_\infty)$ l'espace de Wiener

• $(B_t)_{t\in[0,1]}$ M.B défini par randomisation d'une B.O.N $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $L^2([0,1],dx)$:

$$B_t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \chi_k(s)ds\ g_k.$$

• On considère un processus gaussien centré $(Z_t)_{t\in[0,1]}$, à trajectoires **continues**, de la forme

$$Z_t = \int_0^t K(t,s)dB_s$$

où $K(.,.)$ est un noyau de carré intégrable sur $[0,1]^2$ ($\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[\|\mathbf{Z}_.\|_\infty^{\mathbf{2}}\right] < \infty$).

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note Z_n le processus continu sur $[0,1]$ défini par

$$Z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} g_k \int_0^t K(t,s)\chi_k(s)ds.$$

Le résultat suivant est classique :

Proposition : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite de processus continus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge P presque sûrement dans $\mathcal{C}$ et dans $L^p(P;\mathcal{C})$ vers Z.

Remarques $\begin{cases} -K = 1,\ (\chi_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ base trigonométrique} \Rightarrow \text{Wiener 1923} \\ -K = 1,\ (\chi_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ base de Haar} \Rightarrow \text{construction de Lévy} \end{cases}$

Quid lorsque les $\mathrm{g_k}$ sont erronées ?

Première extension

Les (g_k) sont les applications coordonnées de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m = \mathcal{N}(0,1), H^1(m), u \mapsto u'^2)^{\mathbb{N}}.$$

Classiquement S vérifie (G) et on définit un opérateur de dérivation en posant $\forall U = F(g_1, \ldots, g_n, \ldots) \in \mathbb{D}$,

$$U^{\#} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial g_i}(g_1, \ldots, g_n, \ldots)\widehat{g_i}$$

où les $\widehat{g_k}$ sont les applications coordonnées d'une copie $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$ de $(W, \mathcal{W}, P)$.

On note $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ le domaine vectoriel associé.

On a facilement

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} g_k \int_0^{\cdot} K(.,s)\chi_k(s)ds \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad Z = \int_0^{\cdot} K(.,s)dB_s \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}}$$

avec

$$Z_n^{\#} = \sum_{k=0}^{n} \widehat{g}_k \int_0^{\cdot} K(.,s)\chi_k(s)ds \quad \text{et} \quad Z^{\#} = \int_0^{\cdot} K(.,s)d\widehat{B}_s$$

et donc

$$(Z_n, Z_n^{\#}) \to (Z, Z^{\#}) \text{ dans } L^2(P \otimes \widehat{P}; \mathcal{C}^2)$$

Proposition : La suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Z dans $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$.

Corollaire 1 : $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers Z_*S.

Corollaire 2 : Raffinement quasi-sûr du résultat probabiliste.

Par le calcul fonctionnel généralisé $N_n = \underset{s \in [0,1]}{sup} Z_n(s)$ et $N = \underset{s \in [0,1]}{sup} Z(s) \in \mathbb{D}$.

Proposition : Si pour P presque tout ω, il existe un unique point $T(\omega)$ où la fonction $t \in [0,1] \mapsto Z_t(\omega)$ atteint son maximum, alors

$$N_n \to N \quad \text{dans} \quad \mathbb{D}.$$

Preuve : C'est une conséquence du résultat suivant de Nualart et Vives :

$$N^{\#} = Z^{\#}(T)$$

$$N_n^{\#} = Z_n^{\#}(T_n) \quad \text{avec} \quad T_n = inf\{t \in [0,1]; Z_n(t) = N_n\}$$

Remarque : Résultat analogue pour $M_n = \| Z_n \|_\infty$

Deuxième extension

On écrit Z_n sous la forme

$$Z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{F^{-1}(U_k)}_{g_k} \int_0^t K(t,s)\chi_k(s)ds,$$

où F est la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(0,1)$ et les U_k les coordonnées d'une structure d'erreur produit

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = s^{\mathbb{N}}$$

dont chaque terme est donné par

$$s = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx, dl, \gamma).$$

Remarque : Si $s = F_*(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m = \mathcal{N}(0,1), H^1(m), u \mapsto u'^2)$ on se retrouve dans le cadre précédent.

On considère que s est la plus petite extension fermée de

$$\big([0,1],\mathcal{B}([0,1]),dx,C^1([0,1],\mathbb{R}),\gamma[f](x)=a(x)f'^2(x)\big)$$

où $a:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ vérifie les conditions du théorème de Hamza. On suppose de plus que $\int_0^1 \frac{a}{(F'(F^{-1}))^2}dx = c<\infty \quad (c=1)$, de sorte que

$$F^{-1}\in d\ell \text{ et } \gamma[F^{-1}]=\tfrac{a}{(F'(F^{-1}))^2}.$$

La structure $S=(W,\mathcal{W},P,\mathbb{D},\Gamma)=s^{\mathbb{N}}$ vérifie (G), et on définit un opérateur de dérivation en posant $\forall G\in\mathbb{D}$,

$$G^{\#}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial G}{\partial U_k}\sqrt{a(U_k)}F^{-1}(\widehat{U_k})$$

où les $\widehat{U_k}$ sont les applications coordonnées d'une copie $(\widehat{W},\widehat{\mathcal{W}},\widehat{P})$ de $(W,\mathcal{W},P)$.

On note $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ le domaine vectoriel associé.

On a

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{F^{-1}(U_k)}_{g_k} \int_0^{\cdot} K(.,s)\chi_k(s)ds \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}}$$

avec

$$Z_n^{\#}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{a(U_k)}}{F'(F^{-1}(U_k))} F^{-1}(\widehat{U_k}) \int_0^t K(t,s)\chi_k(s)ds.$$

Problème : Les variables aléatoires $\frac{\sqrt{a(U_k)}}{\mathbf{F'(F^{-1}(U_k))}}\mathbf{F^{-1}(\widehat{U_k})}$ ne sont plus gaussiennes ! ! !

Nous allons jouer sur le choix de l'opérateur gradient associé à $\mathbb{S}$ et procéder par symétrisation.

On pose $\forall G \in \mathbb{D}$,

$$G^{\widetilde{\#}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial U_k} \sqrt{a(U_k)} \frac{F^{-1}(\widehat{U_k}) - F^{-1}(\widetilde{U_k})}{\sqrt{2}}$$

où les $(\widetilde{U_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont les applications coordonnées d'une copie $(\widetilde{W}, \widetilde{\mathcal{W}}, \widetilde{P})$ de $(W, \mathcal{W}, P)$ indépendante de $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$.

On a

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}\otimes\widetilde{P}}\left[(G^{\widetilde{\#}})^2\right] = \Gamma[G].$$

donc $\widetilde{\#}$ est un gradient associé à S à valeurs dans $\mathcal{H} = L^2(\widehat{P} \otimes \widetilde{P})$.

Dans l'esprit de **Feyel-La Pradelle** on peut étendre le domaine de l'opérateur $\widetilde{\#}$ pour les variables à valeurs dans $\mathcal{C}$. On note $\widetilde{\mathbb{D}_{\mathcal{C}}}$ cette extension.

Le domaine $\widetilde{\mathbb{D}_{\mathcal{C}}}$ est équipé de la norme

$$\|G\|_{\widetilde{\mathbb{D}_{\mathcal{C}}}} = \left(\| G \|^2_{L^2(P;\mathcal{C})} + \frac{1}{2} \| G^{\widetilde{\#}} \|^2_{L^2(P\otimes\widehat{P}\otimes\widetilde{P};\mathcal{C})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, $Z_n \in \widetilde{\mathbb{D}_{\mathcal{C}}}$ avec

$$\widetilde{Z_n^{\#}}(t) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{\sqrt{a(U_k)}}{F'(F^{-1}(U_k))} \frac{F^{-1}(\widehat{U_k}) - F^{-1}(\widetilde{U_k})}{\sqrt{2}}}_{\text{symétrique}} \int_0^t K(t,s)\chi_k(s)ds,$$

de même, $Z \in \widetilde{\mathbb{D}_{\mathcal{C}}}$ avec

$$\widetilde{Z^{\#}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{a(U_k)}}{F'(F^{-1}(U_k))} \frac{F^{-1}(\widehat{U_k}) - F^{-1}(\widetilde{U_k})}{\sqrt{2}} \int_0^t K(t,s)\chi_k(s)ds.$$

Proposition : La suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Z dans $\widetilde{\mathbb{D}_{\mathcal{C}}}$.

Corollaire : $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers Z_*S.

Rappel de probabilité

Définition : Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach est dite symétrique si pour tout choix de signes $\pm$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, le vecteur $(\pm X_1, ..., \pm X_N)$ a même loi que $(X_1, ..., X_N)$ (c'est notamment le cas lorsque les X_n sont indépendantes et symétriques).

Théorème (Lévy, Itô, Nisio) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite symétrique de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach séparable B. Pour tout n, on note μ_n la loi de la n-ième somme partielle $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les quatre propositions suivantes sont alors équivalentes :

i) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement ;

ii) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité ;

iii) $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi dans B ;

iv) il existe une probabilité μ sur B telle que $(f_*\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi dans $\mathbb{R}$ vers $(f_*\mu)$ pour tout $f \in B'$.

Proposition : La suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Z dans $\widetilde{\mathbb{D}_{\mathcal{C}}}$.

Preuve : Comme $Z_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{F^{-1}(U_k)}_{g_k} \int_0^{\cdot} K(.,s)\chi_k(s)ds$,

• $Z_n \to Z$ dans $L^2(P;\mathcal{C})$

Comme $\widetilde{Z_n^{\#}}(t) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{\sqrt{a(U_k)}}{F'(F^{-1}(U_k))} \frac{F^{-1}(\widehat{U_k}) - F^{-1}(\widetilde{U_k})}{\sqrt{2}}}_{\text{symétrique}} \int_0^t K(t,s)\chi_k(s)ds$,

• $\widetilde{Z_n^{\#}} \to \widetilde{Z^{\#}}$ en loi au sens des marginales finies-dimensionnelles

D'après Lévy, Itô, Nisio,

• $\| \widetilde{Z_n^{\#}} - \widetilde{Z^{\#}} \|_\infty \to 0$ en probabilité

D'après l'inégalité de Lévy, en posant $Q = P \otimes \widehat{P} \otimes \widetilde{P}$

$$Q(\max_{k\le N} \|\widetilde{Z_k^{\#}}\|_\infty > t) \le 2Q(\|\widetilde{Z_N^{\#}}\|_\infty > t) \Rightarrow \mathbb{E}_Q\left[\max_{k\in\mathbb{N}} \|\widetilde{Z_k^{\#}}\|_\infty^2\right] \le 2\mathbb{E}_Q[\|\widetilde{Z^{\#}}\|_\infty^2] < \infty$$

• $\widetilde{Z_n^{\#}} \to \widetilde{Z^{\#}}$ dans $L^2(P \otimes \widehat{P} \otimes \widetilde{P};\mathcal{C})$

C] Perturbations verticales/ Perturbations horizontales

On peut associer de manière unique à

$$S_{OU} = (\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu, \mathbb{D}_{OU}, \Gamma_{OU})$$

un semi-groupe d'opérateurs $(P_t)_{t\geq 0}$ sur $L^2(\mu)$. En vertu de la formule de Melher, $\forall f \in L^2(\mu)$, $\forall w \in \mathcal{C}$,

$$P_t[f](w) = \int_{\widehat{\mathcal{C}}} f\left(e^{\frac{t}{2}}w + (1-e^t)^{\frac{1}{2}}\widehat{w}\right) d\widehat{\mu}(\widehat{w}) \tag{1}$$

où $\widehat{\mu}$ est la mesure de Wiener associée à une copie $\widehat{\mathcal{C}}$ de l'espace de Wiener initial.

On montre alors classiquement que $\forall f \in \mathbb{D}_{OU}$,

$$\mathcal{E}_{OU}[f] = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}_\mu[(f - P_t[f])f].$$

De cette manière, la structure d'erreur S_{OU} est liée à la perturbation suivante de la trajectoire brownienne :

$$w \mapsto e^{\frac{t}{2}}w + (1-e^t)^{\frac{1}{2}}\widehat{w}.$$

Considérons le processus

$$\sum_{k=0}^{n} g_k \int_0^t \chi_k(s)ds \qquad \left(\text{resp. } \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt-[nt])U_{[nt]+1}\right)\right).$$

Si les g_k (resp. les U_k) sont supposées $\mathbb{D}$-indépendantes et de même $\mathbb{D}$-loi, on peut considérer de manière heuristique que les erreurs infinitésimales associées notées e_k sont i.i.d, ainsi, la trajectoire initiale du processus Y_n (resp. X_n) est perturbée verticalement par celle de

$$\sum_{k=0}^{n} e_k \int_0^t \chi_k(s)ds \qquad \left(\text{resp. } \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} e_k + (nt-[nt])e_{[nt]+1}\right)\right)$$

dont la forme est identique à Y_n (resp. X_n).

Un exemple singulier : Considérons la fonction de répartition empirique

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{\{U_j \leq t\}}$$

associée à un échantillon (U_j) de la loi uniforme.

Lorsque les (U_j) sont érronées, nous avons obtenu des résultats de convergence en $\mathbb{D}$-loi pour l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)dZ_n(t) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(U_j) - \int_0^1 f(t)dt\right)$$

où Z_n est le processus empirique

$$Z_n(t) = \sqrt{n}(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{\{U_j \leq t\}} - t).$$

La limite ne fait pas intervenir S_{OU} mais une structure de type Melher généralisé.