

Schéma d'Euler pour les EDS

Christophe Chorro (christophe.chorro@univ-paris1.fr)

ENSA AGADIR

Décembre 2008

- Chapitre 1: Le schéma d'Euler pour les EDO
- Chapitre 2: Le cas des EDS
 - Les EDS
 - Résultat d'existence
 - Le schéma d'Euler
 - Résultats de convergence
 - Le cas du CIR
- Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S

BALLY, V. AND TALAY, D. : *The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (I) : convergence rate of the distribution function*. Probability Theory and Related Fields, 104 :43-60, 1995. N. BOULEAU, D.

TALAY : *Probabilités numériques*, INRIA, 1992.

D. LAMBERTON, B. LAPEYRE: *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Second edition, Ellipses, Paris, 1997.

B. LAPEYRE, E TEMAM: *Competitive Monte Carlo Method for the pricing of asian options*, Journal of computational finance, 2002.

PAGÈS G., *Multi-step Richardson-Romberg Extrapolation : Remarks on Variance Control and Complexity*, prépublication PMA, 2006.

L.C.G ROGERS, D. WILLIAMS : *Diffusions, Markov processes and Martingales, Vol 1. Foundations*, Springer, Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2000.

TALAY, D. AND TUBARO, L. : *Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations*. Stochastic Anal. Appl. 8(4) :483-509, 1990.

- 1 Le schéma d'Euler pour les EDO
 - Le schéma d'Euler pour les EDO
- 2 Chapitre 2: Le cas des EDS
 - Les EDS
 - Résultat d'existence
 - Résultat d'existence
 - Le schéma d'Euler
 - Le schéma d'Euler
 - Résultats de convergence
- 3 Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S
 - Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S

Le schéma d'Euler pour les EDO

On considère l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante :

$$y'(t) = f(t, y(t)); y(0) = x_0.$$

Lorsque qu'il n'y a pas de solution explicite on peut construire un schéma d'approximation sur $[0, T]$:

- On se donne une **subdivision**, ici, $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{T}{N}, \dots, t_N = T\}$.
- On approxime la solution aux points de la subdivision

$$\hat{y}(0) = x_0$$

$$\hat{y}(t_k) = \hat{y}(t_{k-1}) + \frac{T}{N} f(t_{k-1}, \hat{y}(t_{k-1})).$$

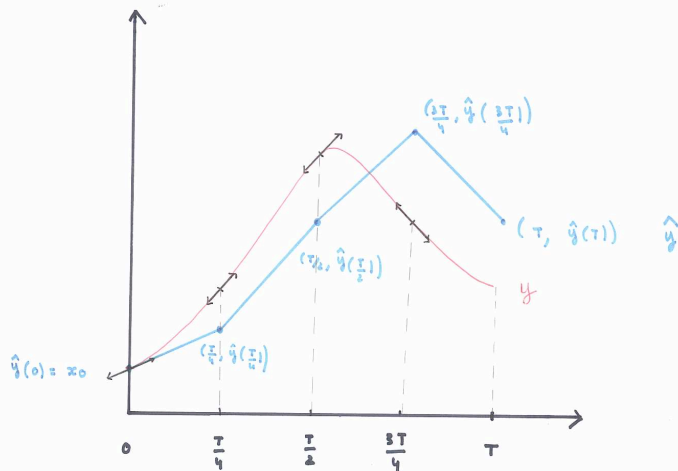
- On approxime la solution sur $[0, T]$ par le processus linéaire par morceaux passant par les points $(t_k, \hat{y}(t_k))_{0 \leq k \leq N}$.

Sous des hypothèses très faible sur la régularité de f

$$\|y - \hat{y}\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Le schéma d'Euler pour les EDO

Schéma d'Euler Pasque $m = 4$



- 1 Le schéma d'Euler pour les EDO
 - Le schéma d'Euler pour les EDO
- 2 **Chapitre 2: Le cas des EDS**
 - **Les EDS**
 - Résultat d'existence
 - Résultat d'existence
 - Le schéma d'Euler
 - Le schéma d'Euler
 - Résultats de convergence
- 3 Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S
 - Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S

On considère un mouvement Brownien (MB) d dimensionnel $(W_t)_{t \in [0, T]}$ i.e

$$W_t = \begin{bmatrix} B_t^1 \\ \vdots \\ B_t^d \end{bmatrix} \text{ où } B^1, \dots, B^d \text{ sont des Browniens indépendants.}$$

Une **équation différentielle stochastique** (EDS) est une équation de la forme

$$(E) \begin{cases} X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \end{cases}$$

où

$$b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{n \times d}(\mathbb{R}).$$

- Exemples:** • **Black-Scholes** ($d = 1, n = 1, b(t, x) = rx, \sigma(t, x) = \sigma x$)

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

- **Modèles à volatilité locale** ($d = 1, n = 1$)

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t, X_t) X_t dW_t.$$

- **Modèles à volatilité stochastique** ($d = 2, n = 2, \rho \in [0, 1]$)

$$d \begin{bmatrix} S_t \\ \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(t, S_t) \\ a(t, \sigma_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_t S_t & 0 \\ \rho b(t, \sigma_t) & \sqrt{1 - \rho} b(t, \sigma_t) \end{bmatrix} dW_t$$

Définition

Une solution à l'équation (E) est un processus vectoriel $(X_t)_{t \in [0, T]}$ adapté à la filtration Brownienne tel que

- $\int_0^T |b(s, X_s)| + |\sigma(s, X_s)|^2 ds < \infty$ p.s
- $\forall t \in [0, T],$

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \text{ p.s}$$

- 1 Le schéma d'Euler pour les EDO
 - Le schéma d'Euler pour les EDO
- 2 **Chapitre 2: Le cas des EDS**
 - Les EDS
 - **Résultat d'existence**
 - Résultat d'existence
 - Le schéma d'Euler
 - Le schéma d'Euler
 - Résultats de convergence
- 3 Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S
 - Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S

Proposition

Sous l'hypothèse

$$\mathcal{H}_1 \left\{ \begin{array}{l} \exists K > 0, \forall t \in [0, T], \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \\ |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y| \\ |b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|) \end{array} \right.$$

l'équation (E) admet une unique solution $(X_t)_{t \in [0, T]}$ vérifiant

$$E \left[\sup_{s \in [0, T]} X_s^2 \right] < \infty.$$

L'hypothèse \mathcal{H}_1 est suffisante mais pas nécessaire cf

$$(CIR): \quad dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

avec $(a, b, \sigma, r_0) \in \mathbb{R}_+$.

- 1 Le schéma d'Euler pour les EDO
 - Le schéma d'Euler pour les EDO
- 2 **Chapitre 2: Le cas des EDS**
 - Les EDS
 - Résultat d'existence
 - **Résultat d'existence**
 - Le schéma d'Euler
 - Le schéma d'Euler
 - Résultats de convergence
- 3 Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S
 - Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S

D'un point de vue pratique nous avons souvent à calculer des quantités du type

$$E[f(X_T)]$$

où $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est solution de (E) .

La méthode MC nous assure que

$$E[f(X_T)] \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(X_T^i).$$

Problèmes:

- La loi de (X_t) est souvent **inconnue**
- Impossible de simuler en **temps continu** \Rightarrow **Discrétisation**

- 1 Le schéma d'Euler pour les EDO
 - Le schéma d'Euler pour les EDO
- 2 **Chapitre 2: Le cas des EDS**
 - Les EDS
 - Résultat d'existence
 - Résultat d'existence
 - **Le schéma d'Euler**
 - Le schéma d'Euler
 - Résultats de convergence
- 3 Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S
 - Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S

Définition

Pour $N \in \mathbb{N}^*$,

- On se donne une *subdivision*, ici, $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{T}{N}, \dots, t_N = T\}$.
- On approxime la solution aux points de la subdivision par

$$\hat{X}^N(0) = x_0$$

$$\hat{X}^N(t_k) = \hat{X}^N(t_{k-1}) + \frac{T}{N} b(t_{k-1}, \hat{X}^N(t_{k-1})) + \sigma(t_{k-1}, \hat{X}^N(t_{k-1}))(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}).$$

- On approxime la solution sur $[0, T]$ par le processus linéaire par morceaux passant par les points $(t_k, \hat{X}^N(t_k))_{0 \leq k \leq N}$:

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}],$$

$$\hat{X}^N(t) = \hat{X}^N(t_k) + (t - t_k)b(t_k, \hat{X}^N(t_k)) + \sigma(t_k, \hat{X}^N(t_k))(W_t - W_{t_k}).$$

- 1 Le schéma d'Euler pour les EDO
 - Le schéma d'Euler pour les EDO
- 2 **Chapitre 2: Le cas des EDS**
 - Les EDS
 - Résultat d'existence
 - Résultat d'existence
 - Le schéma d'Euler
 - **Le schéma d'Euler**
 - Résultats de convergence
- 3 Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S
 - Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S

Le Schéma d'Euler

- La mise en oeuvre pratique est très simple. Il suffit de générer N vecteurs gaussiens indépendants

$$G_j \hookrightarrow \mathcal{N}(0, Id_{n \times n})$$

et considérer

$$W_{t_j} - W_{t_{j-1}} = \sqrt{t_j - t_{j-1}} G_j.$$

- Dans le cas Black-Scholes le schéma est donné en chaque pas de la subdivision par

$$\hat{X}^N(t_k) = \hat{X}^N(t_{k-1}) \left[1 + \frac{T b}{N} + \sigma (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \right].$$

- Lorsque l'on sait simuler de manière exacte une diffusion en temps discret le schéma d'Euler est inutile.

- 1 Le schéma d'Euler pour les EDO
 - Le schéma d'Euler pour les EDO
- 2 **Chapitre 2: Le cas des EDS**
 - Les EDS
 - Résultat d'existence
 - Résultat d'existence
 - Le schéma d'Euler
 - Le schéma d'Euler
 - **Résultats de convergence**
- 3 Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S
 - Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S

Convergence forte du schéma d'Euler

On considère l'hypothèse suivante

$$\mathcal{H}_2 \left\{ \begin{array}{l} \exists K > 0, \exists \alpha > 0, \forall (t, s) \in [0, T]^2, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ |b(t, x) - b(s, x)| + |\sigma(t, x) - \sigma(s, x)| \leq K(1 + |x|) |t - s|^\alpha. \end{array} \right.$$

Remarque: Lorsque (E) est homogène \mathcal{H}_2 est automatiquement vérifiée.

Proposition

Supposons (\mathcal{H}_2) vérifiée. Pour $\beta = \min(\alpha, \frac{1}{2})$,

$\forall p \geq 1, \exists C_p > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*$

$$E[\sup_{t \in [0, T]} | \hat{X}^N(t) - X_t |^{2p}] \leq \frac{C_p}{N^{2\beta p}}.$$

Ainsi, $\forall \gamma < \beta$,

$$N^\gamma \sup_{t \in [0, T]} | \hat{X}^N(t) - X_t | \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \text{ p.s.}$$

Corollaire

Lorsque l'équation est *homogène*,

$\forall p \geq 1, \exists C_p > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*$

$$E \left[\sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}^N(t) - X_t|^{2p} \right] \leq \frac{C_p}{N^p}.$$

Ainsi, $\forall \gamma < \frac{1}{2}$,

$$N^\gamma \sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}^N(t) - X_t| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \text{ p.s.}$$

Convergence forte du schéma d'Euler

En remarquant que pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzienne,

$$| E[f(X_T)] - E[f(\hat{X}^N(t))] | \leq K \sqrt{E[| \hat{X}^N(t) - X_t |^2]}.$$

Corollaire

Premier résultat (grossier) de convergence faible

- Sous (\mathcal{H}_2) , lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$,

$$| E[f(X_T)] - E[f(\hat{X}^N(T))] | \leq \frac{C}{N^{\frac{1}{2}}}.$$

- Lorsque l'équation est homogène

$$| E[f(X_T)] - E[f(\hat{X}^N(T))] | \leq \frac{C}{N^{\frac{1}{2}}}.$$

Exemple: Call ou Put européen lorsque $n = 1$.

Convergence forte du schéma d'Euler

De la même manière si $g : (\mathbb{R}^n)^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est Lipschitzienne et si $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_d = T$,

Corollaire

- Sous (\mathcal{H}_2) , lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$,

$$| E[g(X_{t_0}, \dots, X_{t_d})] - E[g(\hat{X}^N(t_0), \dots, \hat{X}^N(t_d))] | \leq \frac{C}{N^{\frac{1}{2}}}.$$

- Lorsque l'équation est homogène

$$| E[g(X_{t_0}, \dots, X_{t_d})] - E[g(\hat{X}^N(t_0), \dots, \hat{X}^N(t_d))] | \leq \frac{C}{N^{\frac{1}{2}}}.$$

Exemple: Lorsque $n = 1$, options asiatiques ou lookback discrètes.

Convergence faible du schéma d'Euler

On étudie ici la vitesse de convergence de $| E[f(X_T)] - E[f(\hat{X}^N(T))] |$

Notations:

- $C_b^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ est l'ensemble des fonctions dans $C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ dont les dérivées de tout ordre ≥ 1 sont bornées.
- $C_{pol}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions dans $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ dont les dérivées de tout ordre sont à croissance polynomiale:

$\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n, \exists p_a \in \mathbb{N}, \exists C_a > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$

$$\left| \frac{\partial^{(a_1 + \dots + a_n)} F}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}(x) \right| \leq C_a (1 + |x|^{p_a}).$$

Proposition

(Talay-Tubaro 1990)

On suppose que $b \in C_b^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ et $\sigma \in C_b^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{nd})$.
Lorsque $f \in C_{pol}^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$E[f(X_T)] - E[f(\hat{X}^N(T))] = \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{N^i} + O\left(\frac{1}{N^{k+1}}\right)$$

où les C_i ne dépendent que de f .

Remarque: Ce résultat n'est pas utilisable dans le cadre du Put ou du Call européens...

Proposition

(Bally-Talay 1995)

On suppose que l'équation (E) est homogène et que $b \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ et $\sigma \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{nd})$.

Si

$$\exists A > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, \xi^t \sigma(x) \sigma^t(x) \xi \geq A |\xi|^2,$$

lorsque f est mesurable bornée,

$$E[f(X_T)] - E[f(\hat{X}^N(T))] = \frac{C}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

où C ne dépend que de f .

Remarque: Ce résultat est utilisable dans le cadre du Put européen (donc du call).

Convergence faible du schéma d'Euler

- “Pour abaisser les conditions de régularité sur f on augmente celles sur la loi de la diffusion étudiée”
- Les développements précédents permettent d'obtenir un ordre de convergence en $\frac{1}{N^2}$ (**Procédure d'extrapolation de Romberg**):

$$E[f(X_T)] - E[2f(\hat{X}^{2N}(T)) - f(\hat{X}^N(T))] = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Cependant cette procédure a tendance à faire “exploser” la variance de l'estimateur (Pagès 2006).

- Ne pas oublier que “**Erreur Pricing = Erreur discrétisation + Erreur Monte Carlo**”

- 1 Le schéma d'Euler pour les EDO
 - Le schéma d'Euler pour les EDO
- 2 Chapitre 2: Le cas des EDS
 - Les EDS
 - Résultat d'existence
 - Résultat d'existence
 - Le schéma d'Euler
 - Le schéma d'Euler
 - Résultats de convergence
- 3 **Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S**
 - **Chapitre 3: Un exemple, Les options asiatiques dans le Modèle de B&S**

Les options asiatiques

Soit $n = 1 = d$, on considère l'équation homogène suivante

$$(\mathcal{H}_1) \begin{cases} X_0 = x_0 \in \mathbb{R}_+ \\ dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t. \end{cases}$$

On note $A_T = \frac{1}{T} \int_0^T X_s ds$ et on s'intéresse aux options asiatiques:

- Call asiatique à strike fixe $(\frac{1}{T} \int_0^T X_s ds - K)_+$
- Put asiatique à strike fixe $(K - \frac{1}{T} \int_0^T X_s ds)_+$
- Call asiatique à strike flottant $(\frac{1}{T} \int_0^T X_s ds - X_T)_+$
- Call asiatique à strike flottant $(X_T - \frac{1}{T} \int_0^T X_s ds)_+$

Les options asiatiques

En notant $A_t = \frac{1}{T} \int_0^t X_s ds$,

$$d \begin{bmatrix} X_t \\ A_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(X_t) \\ \frac{X_t}{T} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma(X_t) \\ 0 \end{bmatrix} dW_t$$

Le schéma d'euler correspondant est

$$\begin{aligned} \hat{X}^N(t_k) &= \hat{X}^N(t_{k-1}) + \frac{T}{N} b(\hat{X}^N(t_{k-1})) + \sigma(\hat{X}^N(t_{k-1}))(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \\ \hat{A}^N(t_k) &= \frac{1}{N} \hat{X}^N(t_k) + \hat{A}^N(t_{k-1}). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\hat{A}^N(T) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \hat{X}^N(t_k).$$

Rq: Il s'agit ici de la [méthode des rectangles](#) pour le calcul de l'intégrale approchée.

Les options asiatiques

Les fonctions $\phi(x, y) = (x - y)_+$ et $\phi(x, y) = (x - K)_+$ étant Lipschitziennes:

$$| E[(A_T - X_T)_+] - E[(\hat{A}^N(T) - X_T^N)_+] | \leq \frac{\hat{C}}{N^{\frac{1}{2}}}.$$

$$| E[(A_T - K)_+] - E[(\hat{A}^N(T) - K)_+] | \leq \frac{\hat{C}}{N^{\frac{1}{2}}}.$$

Rq: Ces résultats sont valides dans le cadre Black-Scholes.

Les options asiatiques

Mais dans le modèle de Black-Scholes on sait simuler exactement

$$(X_0, X_{\frac{T}{N}}, \dots, X_T).$$

Pourquoi ne pas utiliser

$$\frac{1}{T} \int_0^T X_s ds \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N X_{t_k} = \bar{A}^N(T)?$$

Proposition

(Lapeyre Témam 2002) Dans Black-Scholes,

$$| E[(A_T - X_T)_+] - E[(\bar{A}^N(T) - X_T^N)_+] | \leq \frac{\bar{C}}{N^{\frac{1}{2}}},$$

$$| E[(A_T - K)_+] - E[(\bar{A}^N(T) - K)_+] | \leq \frac{\bar{C}}{N^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{où } \bar{C} = \sigma \sqrt{\frac{e^{(\sigma^2+2r)T}-1}{12(\sigma^2+2r)}}.$$

Les options asiatiques

Comparaison des 2 methodes des rectangles pour un call asiatique ($T=1, K=100, x_0=100, \sigma=0.02, r=0.01$)
exact(en noir) / Euler (en bleu)

