Obtention de la formule de Black-Scholes par passage à la limite dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Christophe Chorro, Alexandre Marino

Introduction

Ce document constitue, dans sa forme actuelle, un complément à vos notes de cours. Il deviendra probablement, dans un futur proche, un polycopié plus élaboré écrit en collaboration avec Alexandre Marino. Le but est d'introduire le formalisme mathématique de modélisation des marchés financiers en utilisant le langage rigoureux de la théorie des probabilités. Pour la partie "plus financière" introduite en préambule de ce cours, je renvois aux premiers chapitres de [2].

L'objectif est ici d'obtenir la célèbre formule de pricing de Black-Scholes ([1]) qui est encore aujourd'hui un outil de référence pour les praticiens opérant sur les marchés financiers. Deux approches sont possibles à ce stade :

1) Aborder le problème de front en modélisant le cours de l'actif risqué à l'aide d'une équation différentielle stochastique. On est alors dans le cadre d'un modèle en temps continu. Cette approche nécessite cependant un minimum de bagage mathématique concernant la théorie des processus stochastiques. Il m'a semblé un peu utopique de traiter "proprement" cette question durant le temps qui m'était accordé (7×1h30). Pour les personnes intéressées, le livre de Lamberton et Lapeyre constitue une excellente référence ([4]).

2) Étudier la modélisation en temps discret des marchés et effectuer de manière rigoureuse le passage à la limite. Cette seconde voie a le mérite de faire appel au minimum d'outils mathématiques tout en permettant d'introduire les notions fondamentales (condition d'autofinancement, arbitrage, marché complet, probabilité risque neutre, etc...). La présentation adoptée ici doit beaucoup à l'enseignement dispensé par le professeur Touzi dans le cadre de la promotion 2001-2002 du DEA MMME de l'Université Paris 1.

Le partiel : L'examen d'évaluation qui aura lieu a l'issu de cet enseignement aura pour but de tester votre aptitude à effectuer des raisonnements d'arbitrage ainsi que la maîtrise des définitions et des modèles abordés en cours. Il n'y aura donc pas de mauvaises surprises.

BON COURAGE!!!!!!

Table des matières

1 Modélisation mathématique d'un marché organisé d'actifs financiers

On se donne une échelle de temps :

- $C = [0, T]$: Marché en temps continu
- $D_N = \{0, \frac{T}{N}, ..., T\}$: marché en temps discret à N périodes.

On considère un espace de probabilité

$$(\Omega = \{\text{configurations macro-économiques}\}, \mathcal{A}, P)$$

et une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \in C}$ $((\mathcal{F}_t)_{t \in D_N})$ de sous tribus de $\mathcal{A}$ représentant la quantité d'information disponible sur le marché à la date t.

Remarque : La condition $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t'}$ lorsque $t' \geq t$ est très naturelle. Elle signifie simplement que l'information disponible sur le marché se dévoile au cours du temps. Une telle famille de sous tribus est appelée une filtration.

Définition 1.1 *Un processus stochastique en temps discret (en temps continu) est une famille de variables aléatoires réelles indexée par D_N (C).*

On peut alors définir deux grandes familles de processus stochastiques :

Définition 1.2 *Un processus stochastique en temps discret $(S_t : \Omega \to \mathbb{R})_{t \in D_N}$ est prévisible (adapté) si, $\forall t > 0$, S_t est $\mathcal{F}_{t-1}$ mesurable ($\mathcal{F}_t$ mesurable) et si S_0 est $\mathcal{F}_0$ mesurable.*

Pour ce qui est du cas continu, la définition du caractère adapté d'un processus est analogue à celle donnée en temps discret. Pour le caractère prévisible on considérera dans ce cours qu'il est identique au caractère adapté pour les processus en temps ***continu****.*

On définit sur ce marché deux grandes catégories d'actifs :

1.1 Actif sans risque

On note r le taux d'intérêt (supposé constant) de la banque de France sur la période $[0, T]$.

On note $S_t^0 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ la valeur d'une unité d'actif sans risque. En accord avec la définition 1.2, on suppose que le processus S^0 est prévisible.

En pratique on considérera toujours que

$$S_t^0 = e^{rt}$$

1.2 Actifs risqués

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère que sur le marché sont présents d actifs risqués : si $S_t^i : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $i > 1$, représente le cours de l'actif i à la date t, le processus S^i est seulement adapté (on ne peut anticiper l'information).

On note

$$S_t^R = (S_t^1, ..., S_t^d)$$

.

Définition 1.3 *Un portefeuille financier est un processus prévisible*

$$\Phi_t = (\Phi_t^0, \underbrace{\Phi_t^1, ..., \Phi_t^d}_{\Phi_t^R}) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

où Φ_t^i représente la quantité d'actif i que l'on détient à la date t. En notant x le capital de départ investit, on a

$$x = \Phi_0^0 S_0^0 + \Phi_0^R . S_0^R .$$

La valeur à l'instant t de ce portefeuille est égale à

$$V^{x,t} = \Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t^R . S_t^R$$

Remarque : $\Phi_t^0 < 0$ représente un emprunt à la banque au taux r, $\Phi_t^i < 0$ représente une vente à découvert

Définition 1.4 *(finance) Un portefeuille financier est autofinancé si après avoir investi x à $t = 0$, on ne réinjecte ou on ne retire aucun capital jusqu'à T. En revanche on a le droit, sous cette contrainte, de réagencer le portefeuille à sa guise à chaque instant.*

Explications : (temps discret) : En temps discret, on part du capital

$$x = \Phi_0^0 S_0^0 + \Phi_0^R . S_0^R .$$

Entre 0 et $\frac{T}{N}$ on peut modifier la composition du portefeuille qui devient $(\Phi_{\frac{T}{N}}^0, \Phi_{\frac{T}{N}}^R)$. On doit avoir la contrainte

$$\Phi_0^0 S_0^0 + \Phi_0^R . S_0^R = \Phi_{\frac{T}{N}}^0 S_0^0 + \Phi_{\frac{T}{N}}^R . S_0^R .$$

En généralisant ce raisonnement, on obtient $\forall k \in 0, ..., N-1$,

$$\Phi_{\frac{kT}{N}}^0 S_{\frac{kT}{N}}^0 + \Phi_{\frac{kT}{N}}^R . S_{\frac{kT}{N}}^R = \Phi_{\frac{(k+1)T}{N}}^0 S_{\frac{kT}{N}}^0 + \Phi_{\frac{(k+1)T}{N}}^R . S_{\frac{kT}{N}}^R . \tag{1}$$

On montre très facilement (exo) que la relation (1) est valide

$\forall k \in 0, ..., N-1$ si et seulement si on a, $\forall k \in 0, ..., N-1$,

$$V^{x,\frac{(k+1)T}{N}} = V^{x,\frac{kT}{N}} + \Phi^0_{\frac{(k+1)T}{N}}(S^0_{\frac{(k+1)T}{N}} - S^0_{\frac{kT}{N}}) + \Phi^R_{\frac{(k+1)T}{N}}.(S^R_{\frac{(k+1)T}{N}} - S^R_{\frac{kT}{N}}).$$

En temps continu : Entre 2 instants t et $t+\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) on doit avoir par analogie avec le cas discret

$$V^{x,t+\varepsilon} = V^{x,t} + \Phi^0_{t+\varepsilon}(S^0_{t+\varepsilon} - S^0_t) + \Phi^R_{t+\varepsilon}.(S^R_{t+\varepsilon} - S^R_t).$$

Cette relation est notée (de manière heuristique) :

$$dV^{x,t} = \Phi^0_t dS^0_t + \Phi^R_t.dS^R_t.$$

La condition ci-dessus peut s'exprimer de manière rigoureuse en utilisant la notion d'équation différentielle stochastique.

Remarque : Si on connaît le capital de départ x nécessaire à la constitution d'un portefeuille autofinancé, la connaissance de Φ^R_t implique la connaissance de Φ^0_t (voir (1)) .

1.3 Hypothèses de modélisation

$\mathbf{H_1}$: Absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A), une définition mathématique

Il n'existe pas de portefeuille autofinancé constitué à partir d'un capital nul dont la valeur vérifie

$$V^{0,T} \geq 0 \quad \text{et} \quad P(V^{0,T} > 0) > 0.$$

Exo : Montrer que la condition précédente équivaut à dire qu'il n'existe pas de portefeuille autofinancé tel que $V^{x,0} = x < 0$, $V^{x,T} \leq 0$ et $P(V^{x,T} = 0) > 0$.

Théorème 1.1 *Considérons deux portefeuilles autofinancés A et B tels que $V^{x,T}_A = V^{x,T}_B$. Alors, $\forall t \in [0,T]$,*

$$V^{x,t}_A = V^{x,t}_B.$$

$\mathbf{H_2}$: Tout actif contingent est réplicable

Définition 1.5 *Un actif contingent est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable (par exemple le payoff d'un call ou d'un put sur un des actifs risqués).*

Définition 1.6 *On dit qu'un actif contingent B est réplicable si il existe un portefeuille autofinancé tel que $V^{x,T} = B$.*

Remarque : L'hypothèse H_2 nous assure que l'on peut, à l'aide d'un portefeuille bien choisi, créer grâce au marché la richesse B à T.

Définition 1.7 *On dit qu'un marché est complet ssi* $\mathbf{H_1}$ *et* $\mathbf{H_2}$ *sont vérifiées.*

Définition 1.8 *Dans le cadre d'un marché complet, on appelle prix à l'instant t de l'actif contingent B (noté $P_t(B)$) la valeur à l'instant t d'un portefeuille autofinancé répliquant B. En particulier si (Φ_t) est tel que $V^{x,T} = B$ alors le prix de l'actif à $t = 0$ est x. Ce prix sera noté $P_0(B) = p(B)$.*

Remarque : En vertu du théorème 1.1, la définition précédente ne présente aucune ambiguïté : la valeur de l'actif contingent à l'instant t est définie de manière unique.

Il est fondamentale de comprendre que l'idée essentielle de la théorie moderne du pricing est d'utiliser le marché pour créer de la valeur.

Définition 1.9 *Soit B un actif contingent et (Φ_t^0, Φ_t^R) le portefeuille de réplication associé, on note $\Delta_t = \Phi_t^R$.*

1.4 Discussion des hypothèses

- Dans le cadre d'un marché complet, les raisonnements d'arbitrage présentés dans cette section (point de vue mathématique) coincident avec ceux effectués dans le préambule de ce cours (point de vue financier). Un excellent exercice est de réécrire les raisonnements d'un point de vue formel pour comprendre où interviennent les hypothèses H_1 et H_2.

- L'hypothèse H_2 est intimement liée à la construction de portefeuilles sans risque.
  Considérons un actif contingent B (pour fixer les choses, B peut être un call européen d'échéance T). L'hypothèse de réplication nous assure l'existence d'un portefeuille autofinancé (Φ_t) tel que

  $$\Phi_T^0 S_T^0 + \Phi_T^R . S_T^R = B.$$

  Ainsi,

  $$S_T^0 = \frac{B - \Phi_T^R . S_T^R}{\Phi_T^0},$$

  de même,

  $$S_t^0 = \frac{P_t(B) - \Phi_t^R . S_t^R}{\Phi_t^0}.$$

On parle alors de gestion Δ neutre : le problème de la réplication de B se ramène à la construction d'un portefeuille financier (contenant une unité d'actif contingent B et une certaine quantité d'actifs risqués) permettant de reproduire grâce au marché le taux des placements sans risque. Ce point de vue est notamment adopté dans [2].

1.5 Problématique :

Nous allons maintenant proposer une réponse concrète aux trois problèmes financiers fondamentaux suivant :

0) Modéliser le cours des actifs risqués

Nous allons ainsi présenter plusieurs exemples de modélisation en temps discret.

1) Pricing

Trouver, dans un modèle donné, le prix d'un actif contingent, en particulier, celui d'un call européen sur un des actifs risqués.

2) Hedging (couverture)

Comment produire la richesse nécessaire à la livraison de l'actif : Connaître la composition exacte du portefeuille autofinancé de réplication d'un actif, en particulier, d'un call.

2 Le modèle binomial

2.1 Modèle binomial 1 période

On considère un exemple très simple (le plus simple) de marché financier. On suppose

1) $T = 1$, $N = 1$, ainsi, $D_1 = \{0, 1\}$.
2) $\Omega = \{w_u, w_d\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, P est une probabilité telle que $0 < P(w_u) < 1$.
3) Un seul actif risqué est disponible avec

$$S_0^0 = 1,\ S_1^0 = e^r$$

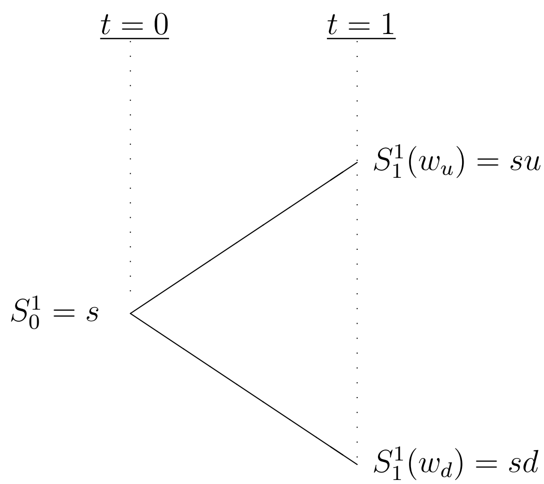
$$S_0^1 = s,\ S_1^1(w_u) = su,\ S_1^1(w_d) = sd$$

où r, s, u, d sont des réels > 0 fixés tels que $u > d$.

4) On supposera de plus que

$$\boxed{\mathbf{u > e^r > d}.}$$

Remarque : Dans ce cas $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$, en particulier, un portefeuille financier qui est un processus prévisible est, dans ce cas, déterministe (car mesurable par rapport à la tribu triviale $\mathcal{F}_0$).



Dynamique de l'actif risqué

Ce marché est il complet ?

2.1.1 Hypothèse H_1 :

Proposition 2.1 *A.O.A* $\Leftrightarrow u > e^r > d$.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Raisonnons par l'absurde.

-Si $u \leq e^r$.

À $t = 0$, on considère le portefeuille $\Phi_0 = (s, -1)$ qui reste constant au cours du temps (et qui est donc, de manière évidente, autofinancé). À $t = 1$, la valeur de ce portefeuille est $se^r - S_1^1 \geq s(e^r - u) \geq 0$. De plus, $P(se^r - S_1^1 > 0) \geq P(w_d) > 0$ ce qui contredit la condition de non arbitrage. On remarque au passage pourquoi la condition 2) sur la probabilité P a été imposée.

- Si $e^r \leq d$.

On raisonne de la même manière. À $t = 0$, $\Phi_0 = (-s, 11)$. À $t = 1$, la valeur de ce portefeuille est $-se^r + S_1^1 \geq s(d - e^r) \geq 0$. De plus, $P(-se^r + S_1^1 > 0) \geq P(w_u) > 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par l'absurde.

Soit $(\Phi_t^0, \Phi_t^1)_{t\in\{0,1\}}$ un portefeuille autofinancé tel que

$$0 = \Phi_0^0 + \Phi_0^1 s$$

et

$$\Phi_1^0 e^r + \Phi_1^1 S_1^1 \geq 0 \ \text{ et } \ P(\Phi_1^0 e^r + \Phi_1^1 S_1^1 > 0) > 0.$$

Par autofinancement

$$\Phi_1^0 + \Phi_1^1 s = 0$$

et donc

$$\Phi_1^1[-se^r + S_1^1] \geq 0 \ \text{ et } \ P(\Phi_1^1[-se^r + S_1^1] > 0) > 0.$$

Un tel portefeuille ne peut exister car de

$$\Phi_1^1[-se^r + S_1^1] \geq 0 \ \text{ et } \ u > e^r > d$$

on tire $\Phi_1^1 = 0$ et donc la condition

$$P(\Phi_1^1[-se^r + S_1^1] > 0) > 0$$

ne peut être vérifiée.□

2.1.2 Hypothèse H_2 :

Considérons un actif contingent B défini par ses payements à la date $t = 1$: on a $B(w_u) = B_u$ et $B(w_d) = B_d$

Dans ce cas, un portefeuille autofinancé de réplication $(\Phi_t = (\Phi_t^0, \Phi_t^1))_{t\in\{0,1\}}$ formé avec le capital initial $P(B) = x$ a pour valeur à $t = 1$

$$V^{x,1} = \Phi_1^0 e^r + \Phi_1^1 S_1^1 = (x - \Phi_1^1 s)e^r + \Phi_1^1 S_1^1$$

car la condition d'autofinancement entraîne

$$x = \Phi_1^0 + \Phi_1^1 s.$$

On doit donc résoudre le système suivant (les inconnues étant les quantités déterministes (x, Φ_1^1)) :

$$V^{x,1}(w_u) = B_u$$

$$V^{x,1}(w_d) = B_d.$$

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui se résout aisément. On obtient alors

$$\Phi_1^1 = \frac{B_u - B_d}{su - sd} \quad \text{(dérivée discrète)}$$

et

$$x = P(B) = \frac{e^r - d}{u - d} \times \frac{B_u}{e^r} + \frac{u - e^r}{u - d} \times \frac{B_d}{e^r}.$$

Remarque : La condition d'autofinancement $x = \Phi_1^0 + \Phi_1^1 s$, nous fournit aussi la quantité d'actif sans risque que doit contenir le portefeuille de réplication :

$$\Phi_1^0 = P(B) - \frac{B_u - B_d}{su - sd}.$$

En définissant sur Ω la probabilité suivante

$$Q(w_u) = \frac{e^r - d}{u - d} \quad \text{et} \quad Q(w_d) = \frac{u - e^r}{u - d}$$

on peut voir que

$$P(B) = \mathbb{E}_Q[Be^{-r}].$$

De plus, la condition $u > e^r > d$ implique

$$Q(w_u) > 0 \quad \text{et} \quad Q(w_d) > 0.$$

Cette observation est un cas particulier d'un résultat important bien plus général (Admis, [4], chap.1) :

Définition 2.1 *Deux probabilités P et Q définies sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A})$ sont équivalentes ssi $\forall A \in \mathcal{A}$*

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0.$$

Théorème 2.1 *Lorsque un marché financier est complet, il existe une unique probabilité Q équivalente à P telle que le prix $p(B)$ d'un actif contingent B soit égal à l'espérance sous Q de sa valeur finale actualisée.*

Remarque : Liens avec la finance ("le monde mathématique" coincide avec "le monde financier").

Bien que naturelle, la définition de $P(B)$ peut paraître arbitraire. Nous allons montrer par un raisonnement d'arbitrage purement financier qu'elle est totalement justifiée. Considérons que l'actif contingent B soit disponible à la vente sur un marché organisé au prix $\Pi(B)$, on a alors la proposition suivante :

Proposition 2.2 *En l'A.O.A, on a forcément* $\Pi(B) = P(B)$.

Preuve -Si $\Pi(B) > P(B)$.

- On achète B à $t = 0$, au prix $\Pi(B)$ du marché.

- On achète à $t = 0$, $-\Phi_1^1 = -\frac{B_u - B_d}{su - sd}$ unités d'actifs risqué au prix $-\Phi_1^1 s$.

- On achète à $t = 0$, $\underbrace{-P(B) + \Phi_1^1 s}_{-\Phi_1^0}$ unités d'actif sans risque au prix $-P(B) + \Phi_1^1 s$.

Le capital nécessaire pour mettre en place cette stratégie est

$$P(B) - \Pi(B) < 0.$$

A $t = 1$, la valeur de ce portefeuille est

$$B - B = 0.$$

Contradiction.

(Exo : Faire le cas $\Pi(B) < P(B)$.)$\square$

2.2 Modèle binomial 2 périodes

On suppose

1) $T = 1$, $N = 2$, ainsi, $D_2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.
2) $\Omega = \{w_u, w_d\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, on munit Ω d'une probabilité produit de la forme $P \otimes P$ où P est une probabilité sur $\{w_u, w_d\}$ telle que $0 < P(w_u) < 1$.
3) Un seul actif risqué est disponible avec

$$S_0^0 = 1,\ S_{\frac{1}{2}}^0 = e^{\frac{r}{2}},\ S_1^0 = e^r.$$

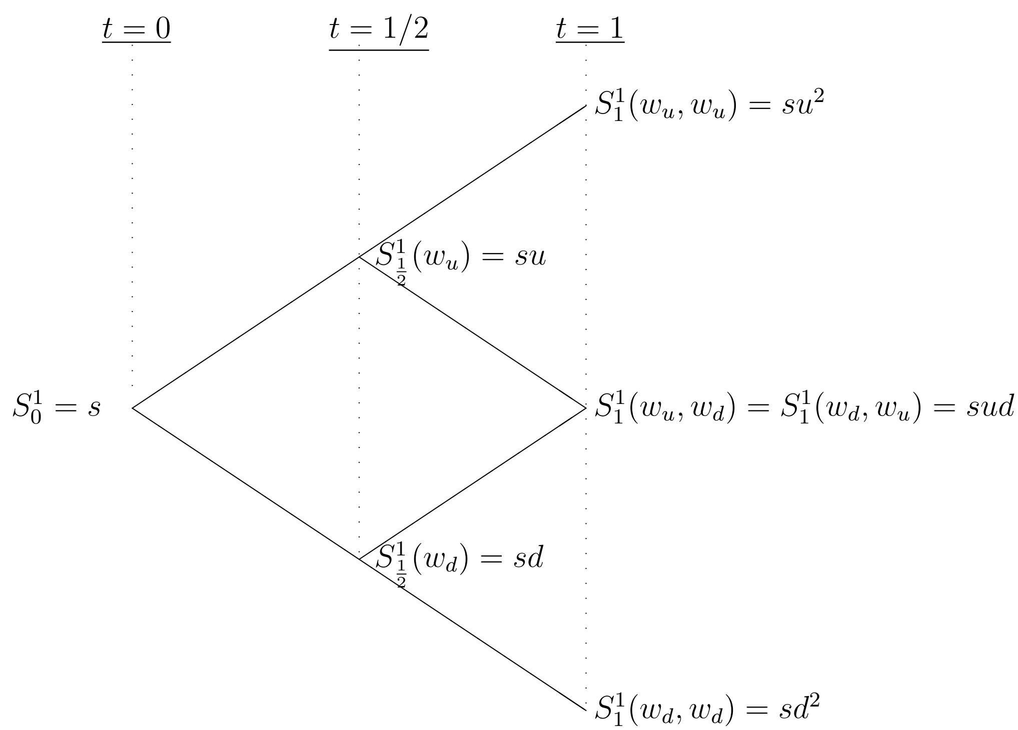
$$S_0^1 = s,\ S_{\frac{1}{2}}^1(w_u) = su,\ S_{\frac{1}{2}}^1(w_d) = sd$$
$$S_1^1(w_u, w_u) = su^2,\ S_1^1(w_u, w_d) = S_1^1(w_d, w_u) = sud,\ S_1^1(w_d, w_d) = sd^2$$

où r, s, u, d sont des réels > 0 fixés tels que $u > d$.

4) On supposera de plus que

$$\boxed{\mathbf{u > e^{\frac{r}{2}} > d}.}$$

Dans ce cas, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} = \{\emptyset, \Omega, \{w_u\}, \{w_d\}\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$.



Dynamique de l'actif risqué

2.2.1 Les hypothèses H_1 et H_2 sont vérifiées

Proposition 2.3 *(Exo) On montre par un raisonnement analogue à celui de la preuve de la proposition 2.1 que l'A.O.A est équivalente à* $u > e^{\frac{r}{2}} > d$.

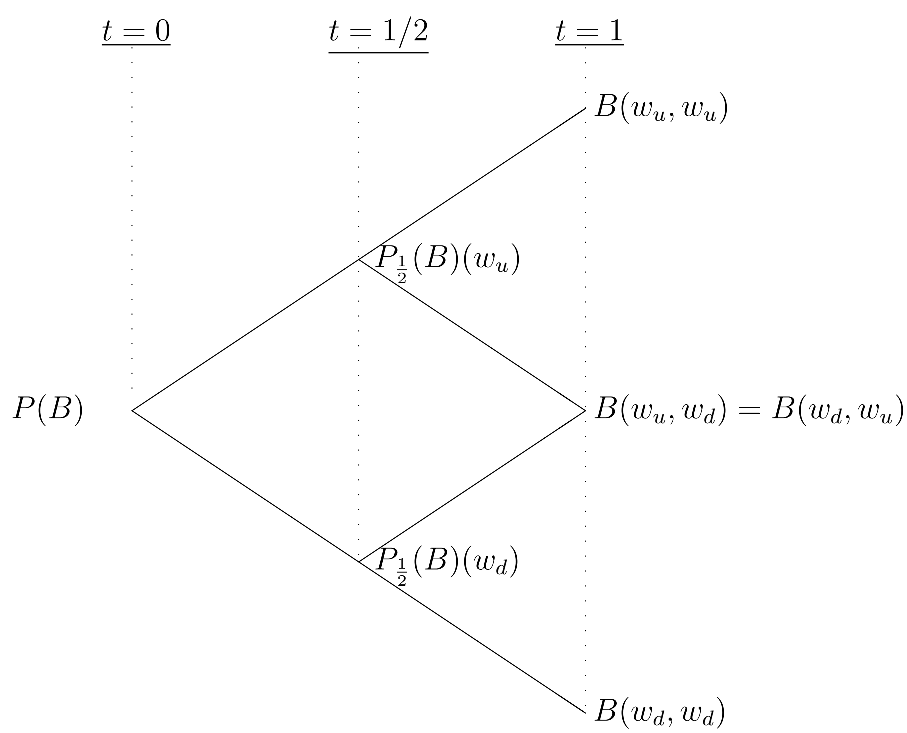
Preuve : Indication : Considérer le portefeuille constant au cours du temps $(s, -1)$ (le portefeuille $(-s, 1)$)) si $u \leq e^{\frac{r}{2}}$ (si $e^{\frac{r}{2}} \leq d$).□

Proposition 2.4 *L'hypothèse H_2 est trivialement vérifiée en effectuant un raisonnement **BACKWARD** (récurrence arrière) permettant de se ramener au cas de trois marchés financiers complets une période (un tel raisonnement sera mis en place dans le paragraphe suivant).*

2.2.2 Pricing et Hedging

Dans ce contexte, on se propose d'étudier la réplication d'un actif contingent de la forme $B = g(S_1^1)$ où g est une fonction continue.

Remarque : Notons que dans le cas considéré, $B(w_u, w_d) = B(w_d, w_u)$ ce qui simplifie un peu les choses.



Dynamique de l'actif contigent

Pour pricer cet actif, on fait un raisonnement **BACKWARD** (récurrence arrière). On décompose le problème en trois marchés une période.

On montre, par analogie avec la section précédente, que

$$P_{\frac{1}{2}}(B)(w_u) = \mathbb{E}_{Q_2}\left[\frac{B(w_u, .)}{e^{\frac{r}{2}}}\right] \quad \text{(on intégre en la deuxième variable)}$$

où Q_2 est la probabilité sur $\{w_u, w_d\}$ défini par

$$Q_2(w_u) = q_2 = \frac{e^{\frac{r}{2}} - d}{u - d}.$$

De même,

$$P_{\frac{1}{2}}(B)(w_d) = \mathbb{E}_{Q_2}\left[\frac{B(w_d, .)}{e^{\frac{r}{2}}}\right].$$

Enfin,

$$P(B) = \mathbb{E}_{Q_2}\left[\frac{P_{\frac{1}{2}}(B)}{e^{\frac{r}{2}}}\right].$$

Au final, on a

$$P(B) = \mathbb{E}_{Q_2 \otimes Q_2}\left[\frac{B}{e^r}\right].$$

Remarque : On retrouve le résultat du théorème 2.1 car la probabilité $Q_2 \otimes Q_2$ est équivalente à $P \otimes P$.

Si $B = g(S_1^1)$ on obtient (comme B est symétrique)

$$P(B) = \frac{1}{e^r} \sum_{k=0}^{2} g(su^k d^{2-k}) C_k^2 (q_2)^k (1 - q_2)^{2-k}.$$

On montre aussi que la quantité d'actif risqué que doit contenir le portefeuille de réplication à $t = \frac{1}{2}$ vaut

$$\Phi_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{P_{\frac{1}{2}}(B)(w_u) - P_{\frac{1}{2}}(B)(w_d)}{us - ds}.$$

De la même manière, $\forall w \in \{w_u, w_d\}$,

$$\Phi_1^1(w) = \frac{B(w, w_u) - B(w, w_d)}{uS_{\frac{1}{2}}^1(w) - dS_{\frac{1}{2}}^1(w)}.$$

Remarque : Le portefeuille Φ est autofinancé par construction car

$$P(B) = \Phi^1_{\frac{1}{2}} S^1_0 + \Phi^0_{\frac{1}{2}}$$

et

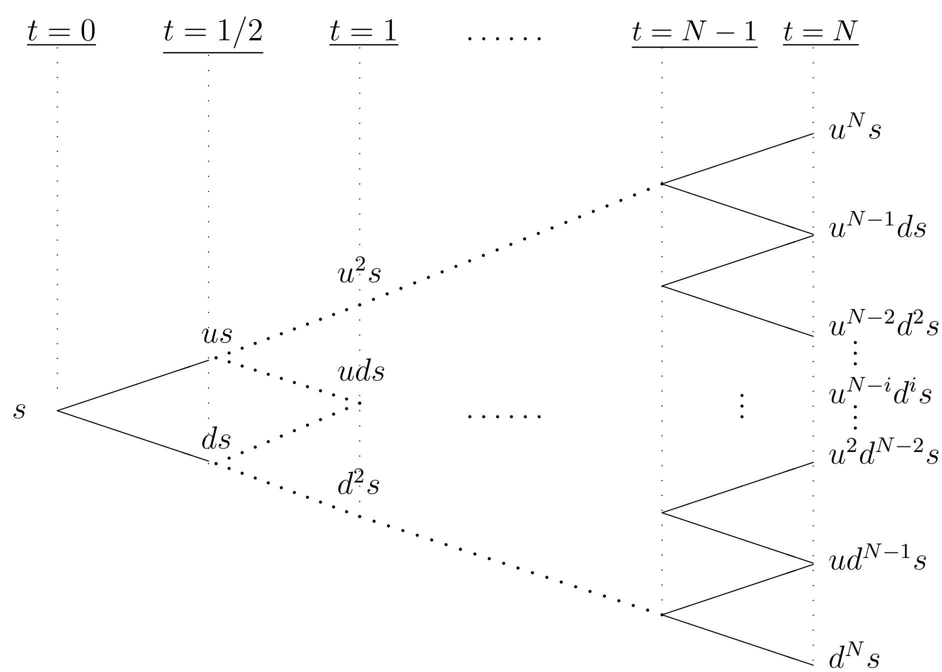
$$\Phi^1_{\frac{1}{2}} S^1_{\frac{1}{2}} + \Phi^0_{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2}} = P_{\frac{1}{2}}(B) = \Phi^1_1 S^1_{\frac{1}{2}} + \Phi^0_1 e^{\frac{r}{2}}.$$

De plus il réplique l'actif :

$$\Phi^1_1 S^1_1 + \Phi^0_1 e^r = B.$$

2.3 Modèle binomial N périodes

Dans le cas du modèle N périodes, nous allons préciser le formalisme mathématique sous-jacent et donner les formules de couverture et de pricing sans démonstrations. Le raisonnement utilisé est la généralisation immédiate du cas $N = 2$.



Dynamique de l'actif risqué

On suppose

1) $T = 1$, $N \in \mathbb{N}^*$, ainsi, $D_N = \{0, \frac{1}{N}, ..., 1\}$.

2) $\Omega = \{w_u, w_d\}^N$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, on munit Ω d'une probabilité produit de la forme $\underbrace{P \otimes ... \otimes P}_{\text{N fois}}$ où P est une probabilité sur $\{w_u, w_d\}$ telle que $0 < P(w_u) < 1$.

3) Le marché comprend un seul actif risqué. De plus,

$$S_0^0 = 1,\ \forall k \in \{1, ...N\},\ S^0_{\frac{k}{N}} = e^{\frac{kr}{N}}.$$

Pour $w \in \{w_u, w_d\}^k$, on note $i_k(w) = \#\{i \in \{1, ..., k\} | w_i = w_u\}$, $j_k(w) = \#\{j \in \{1, ..., k\} | w_j = w_d\}$ $(i_k(w) + j_k(w) = k)$. Alors,

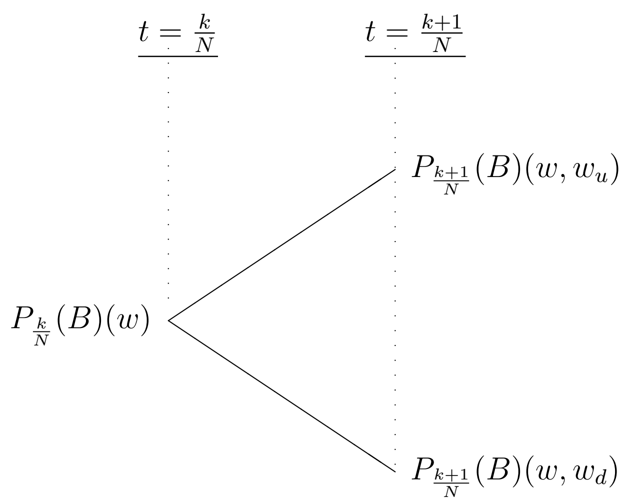
$$S_0^1 = s,\ S^1_{\frac{k}{N}}(w) = s u^{i_k(w)} d^{j_k(w)}.$$

4) On supposera de plus que

$$\boxed{\mathbf{u} > \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{N}}} > \mathbf{d}.}$$

Dans ce cas, $\forall k \in \{0, ...N\}$, $\mathcal{F}_{\frac{k}{N}} = \mathcal{P}(\{w_u, w_d\}^k)$.

Ce marché financier vérifie, par analogie avec le cas $N = 2$, les hypothèses H_1 et H_2.



Dynamique de l'actif contingent

De plus, lorsque $B = g(S_1^1)$ avec g continue, on montre que, $\forall k \in \{0, ..., N-1\}$, $\forall w \in \{w_u, w_d\}^k$,

$$P_{\frac{k}{N}}(B)(w) = \frac{1}{e^{\frac{r}{N}}}[q_N P_{\frac{k+1}{N}}(B)(w, w_u) + (1 - q_N) P_{\frac{k+1}{N}}(B)(w, w_d)] \qquad (2)$$

où Q_N est la probabilité sur $\{w_u, w_d\}$ telle que

$$Q_N(w_u) = q_N = \frac{e^{\frac{r}{N}} - d}{u - d}.$$

Ainsi, par une récurrence arrière, on en déduit que

$$P_{\frac{k}{N}}(B)(w) = \mathbb{E}_{(Q_N)^{\otimes N-k}}\left[\frac{g(S_1^1(w,.))}{e^{r(1-\frac{k}{N})}}\right]$$

et donc que $\forall k \in \{1, ..., N\}$, $\forall w \in \{w_u, w_d\}^k$,

$$P_{\frac{k}{N}}(B)(w) = \frac{1}{e^{r(1-\frac{k}{N})}}\sum_{j=0}^{N-k} g\left(S^1_{\frac{k}{N}}(w)u^j d^{N-k-j}\right) C_j^{N-k} q_N^j (1-q_N)^{N-k-j}.$$

En particulier,

$$P(B) = \frac{1}{e^r}\sum_{j=0}^{N} g\left(su^j d^{N-j}\right) C_j^N q_N^j (1-q_N)^{N-j}. \tag{3}$$

Remarque : La formule (2) nous permet d'avoir la méthode la plus efficace de calcul du prix de l'actif car elle permet d'éviter le calcul numérique des C_k^n qui pose des problèmes.

Pour ce qui est du problème de la couverture, on obtient par analogie immédiate avec le cas $N = 2$, $\forall k \in \{1, ..., N\}$, $\forall w \in \{w_u, w_d\}^k$,

$$\Phi^1_{\frac{k}{N}}(w) = \frac{P_{\frac{k}{N}}(B)(w, w_u) - P_{\frac{k}{N}}(B)(w, w_d)}{(u-d)S^1_{\frac{k-1}{N}}}.$$

Il faut bien comprendre que le modèle multi-périodes est en fait une succession de $\mathbf{\frac{N(N+1)}{2}}$ problèmes locaux 1 période.

2.4 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein (C.R.R)

2.4.1 Le modèle

Le modèle C.R.R est un cas particulier du modèle binomial N périodes dont les paramètres u et d (qui vont dépendre de N) sont choisis pour permettre le passage à la limite lorsque $N \to \infty$. L'intérêt de ce modèle datant de 1979 est qu'il approche de manière satisfaisante le célèbre modèle en temps continu proposé par Black et Scholes en 1973.

1) On se place dans le cas où $T = 1$, $N \in \mathbb{N}^*$ ainsi $D_N = \{0, \frac{1}{N}, ..., 1\}$.
2) $\Omega = \{w_u, w_d\}^N$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et on munit Ω d'une probabilité de la forme $P \otimes ... \otimes P$ où P est une probabilité sur $\{w_u, w_d\}$ telle que $0 < P(w_u) < 1$.

3) On définit alors une famille de variables aléatoires $(Z_1, \dots, Z_N)$ telles que $\forall i \in \{1, ..., N\}$,

$$Z_i : w = (w_1, ..., w_N) \in \Omega \mapsto Z_i(w_i) \in \{-1, 1\}$$

avec

$$P(Z_i = 1) = p$$
$$P(Z_i = -1) = 1 - p$$

avec $1 > p > 0$. Dans ce cas les Z_i forment un N-échantillon. On pose $\mathcal{F}_k = \sigma(Z_1, ...Z_k)$. Le cours de l'actif risqué est alors donné par

$$S_0^1 = s \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, ..., N\}, \quad S_{\frac{k}{N}}^1 = s e^{k b_N + \sigma_N \sum\limits_{i=1}^{k} Z_i}.$$

Le cours de l'actif sans risque vérifie, quant à lui, $\forall k \in \{0, ..., N\}$,

$$S_{\frac{k}{N}}^0 = e^{\frac{kr}{N}}.$$

Il s'agit donc d'un cas particulier de modèle binomial avec

$$u_N = e^{b_N + \sigma_N} \quad \text{et} \quad d_N = e^{b_N - \sigma_N}.$$

On impose donc la condition d'A.O.A

$$u_N > e^{\frac{r}{N}} > d_N.$$

Dans ce cas ce modèle vérifie H_1 et H_2.

On s'intéresse, dans cette partie, à l'évaluation de l'actif contingent $B = g(S_1^1) = (S_1^1 - K)_+$ (Payoff d'un call européen de strike K sur l'actif risqué S^1) pour une certaine constante positive K.

D'après la formule (3), on a, en notant $P^N(B)$ le prix à $t = 0$ de l'actif contingent B dans le modèle C.R.R N périodes,

$$P^N(B) = \frac{1}{e^r} \sum_{j=0}^{N} g\left(s u_N^j d_N^{N-j}\right) C_j^N q_N^j (1 - q_N)^{N-j} \tag{4}$$

où

$$q_N = \frac{e^{\frac{r}{N}} - d_N}{u_N - d_N}, \ 1 - q_N = \frac{u_N - e^{\frac{r}{N}}}{u_N - d_N}.$$

En notant

$$\eta_N = \inf \{j \in \{0, ..., N\} / s u_N^j d_N^{N-j} \geq K\},$$

$$P^N(B) = \frac{1}{e^r} \sum_{j=\eta_N}^{N} \left(s u_N^j d_N^{N-j} - K \right) C_j^N q_N^j (1-q_N)^{N-j} \tag{5}$$

Remarque : La quantité $\eta_N \in \{0, ..., N\}$, de plus, $\forall j \geq \eta_N$, $s u_N^j d_N^{N-j} \geq K$. En effet, on remarque (en passant au *log*) que la fonction $i \mapsto s u_N^i d_N^{N-i}$ est croissante car $u_N > d_N$. De plus, on peut toujours supposer $s u_N^N \geq K$ car sinon l'actif contingent B est nul ce qui est peu intéressant. L'ensemble $\{j \in \{0, ..., N\} / s u_N^j d_N^{N-j} \geq K\}$ est donc non vide et sa borne inférieure finie.

2.4.2 Rappels et notations de probabilités

Une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\{0, ..., n\}$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p) si, $\forall k \in \{0, ..., n\}$,

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque : Si X suit une loi binomiale de paramètres (n, p), on peut écrire

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, c'est à dire,

$$P(X_i = 1) = p \text{ et } P(X_i = 0) = 1 - p.$$

On notera de plus

$$\mathcal{B}(n, p, \eta) = P(X \geq \eta).$$

D'après la formule (5),

$$P^N(B) = \frac{1}{e^r} \sum_{j=\eta_N}^{N} \left(s u_N^j d_N^{N-j} - K \right) C_j^N q_N^j (1-q_N)^{N-j}$$

et donc

$$P^N(B) = s \sum_{j=\eta_N}^{N} C_j^N \left(\frac{u_N q_N}{e^{\frac{r}{N}}} \right)^j \left(\frac{(1-q_N) d_N}{e^{\frac{r}{N}}} \right)^{N-j} - \frac{K}{e^r} \sum_{j=\eta_N}^{N} C_j^N q_N^j (1-q_N)^{N-j}.$$

En remarquant que
$$\frac{u_N q_N}{e^{\frac{r}{N}}} + \frac{(1-q_N)d_N}{e^{\frac{r}{N}}} = 1,$$
on obtient
$$P^N(B) = s\mathcal{B}(N, \frac{u_N q_N}{e^{\frac{r}{N}}}, \eta_N) - \frac{K}{e^r}\mathcal{B}(N, q_N, \eta_N). \tag{6}$$

2.4.3 Rappels concernant la convergence en loi des variables aléatoires

Pour la démonstration des résultats présentés ici nous renvoyons à [3].

$*$ **Convergence en loi des variables aléatoires**

Définition 2.2 *Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ converge en loi vers une variable aléatoire X réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ssi pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*
$$E_P[f(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E_P[f(X)].$$
On notera alors
$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X.$$

$*$ **Critères de convergence**

Nous donnons maintenant deux critères permettant de démontrer la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Définition 2.3 *Si Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ on notera $F_Y : \mathbb{R} \to [0,1]$ (resp. $\Phi_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) sa fonction de répartition (resp. sa fonction caractéristique) qui est définie, $\forall t \in \mathbb{R}$, par*
$$F_Y(t) = P(Y \leq t) \ \ (resp. \ \ \Phi_Y(t) = E_P\left[e^{itY}\right]).$$

Proposition 2.5 *On a $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$ ssi une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

a) $F_{X_n}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(t)$ pour tout point t où F_X est continue.

b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X_n}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi_X(t)$.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème de Dini.

Corollaire 2.1 *Si* $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} X$ *et si* $t_n \underset{n\to\infty}{\to} t$ *dans* $\mathbb{R}$, *alors,*

$$F_{X_n}(t_n) \underset{n\to\infty}{\to} F_X(t).$$

Corollaire 2.2 *Si* $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} X$ *avec* F_X *continue, alors,*

1)

$$P(X_n \geq t) \underset{n\to\infty}{\to} P(X \geq t).$$

2) Si $t_n \underset{n\to\infty}{\to} t$,

$$P(X_n \geq t_n) \underset{n\to\infty}{\to} P(X \geq t).$$

$*$ **La loi normale** $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \sigma^2)$

Définition 2.4 *Une variable aléatoire* X *suit une loi normale de moyenne* m *et de variance* σ^2 *(on note alors* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$*) si*

$$F_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On peut montrer de plus que

$$\Phi_X(t) = e^{itm} e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2}}.$$

$*$ **Théorème de la limite centrale**

La loi normale (appelée aussi loi de Gauss) est fondamentale en théorie des probabilités car elle apparaît comme limite dans le résultat de convergence en loi suivant :

Théorème 2.2 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires i.i.d de moyenne* m *et de variance finie notée* σ^2, *alors,*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve : On note

$$Y_i = \frac{X_i - m}{\sqrt{\sigma^2}}.$$

Ainsi,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

où les Y_i sont i.i.d de moyenne nulle et de variance 1.

En utilisant l'indépendance et l'équi-distribution, on a

$$\Phi_{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i}(t) = \left[\Phi_{Y_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right]^n .$$

Comme Y_1 est de carré intégrable, le théorème de dérivation sous le signe somme de Lebesgue nous assure que Φ_{Y_1} est deux fois dérivable avec

$$\Phi'_{Y_1}(0) = iE[Y_1] = 0$$

et

$$\Phi''_{Y_1}(0) = -E[Y_1^2] = -1.$$

En appliquant la formule de Taylor Young au voisinage de 0, on obtient

$$\Phi_{Y_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t}{n}).$$

Un simple calcul de limite nous assure alors

$$\Phi_{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i}(t) \underset{n \to \infty}{\to} e^{\frac{-t^2}{2}} = \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t).$$

On a donc le résultat en utilisant la proposition 2.5.□

Nous avons à présent le matériel nécessaire pour effectuer le passage à la limite dans le modèle C.R.R.

2.4.4 Passage à la limite

Nous allons supposer dans ce paragraphe que

$$b_N = \frac{b}{N} \text{ et } \sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

b et σ étant deux paramètres strictement positifs appelés le drift (la tendance, la dérive) et la volatilité.

Remarque : Les résultats que nous allons démontrer ici sont valables lorsque les suites $(b_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ et $(\sigma_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ vérifient

$$Nb_N \underset{N\to\infty}{\to} b \ \text{ et } \ \sqrt{N}\sigma_N \underset{N\to\infty}{\to} \sigma.$$

En utilisant la relation (6), on a démontré que

$$P^N(B) = s\mathcal{B}(N, \frac{u_N q_N}{e^{\frac{r}{N}}}, \eta_N) - \frac{K}{e^r}\mathcal{B}(N, q_N, \eta_N).$$

Nous allons étudier le comportement asymptotique du terme $\mathcal{B}(N, q_N, \eta_N)$, la méthode étant identique (**le faire en exercice**) pour le terme $\mathcal{B}(N, \frac{u_N q_N}{e^{\frac{r}{N}}}, \eta_N)$.

Ainsi, si on note, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $(X_1^N, ..., X_N^N)$ un N-échantillon d'une loi de Bernoulli de paramètre q_N,

$$\mathcal{B}(N, q_N, \eta_N) = P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^N \geq \eta_N\right).$$

Comme $E[X_1^N] = q_N$ et $var[X_1^N] = q_N(1-q_N)$ on a

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^N - Nq_N}{\sqrt{Nq_N(1-q_N)}} \geq \frac{\eta_N - Nq_N}{\sqrt{Nq_N(1-q_N)}}\right)$$

où

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^N - Nq_N}{\sqrt{Nq_N(1-q_N)}} \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0,1) \tag{7}$$

en vertu du théorème 2.2.

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 2.1 *En notant*

$$d_1 = \frac{log(\frac{s}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma},$$

$$\frac{\eta_N - Nq_N}{\sqrt{Nq_N(1-q_N)}} \underset{N\to\infty}{\to} -d_1 + \sigma.$$

Preuve du lemme : Comme

$$\eta_N = \inf\{j \in \{0, ..., N\} / s u_N^j d_N^{N-j} \geq K\},$$

nous avons

$$su_N^{\eta_N} d_N^{N-\eta_N} \geq K \tag{8}$$

et

$$su_N^{\eta_N - 1} d_N^{N-\eta_N+1} < K \tag{9}$$

avec

$$u_N = e^{\frac{b}{N} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \quad \text{et} \quad d_N = e^{\frac{b}{N} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}}.$$

On déduit aisément en passant au logarithme dans l'inégalité (8) que

$$\eta_N \geq \frac{N}{2} + \sqrt{N}\left(\frac{log(\frac{K}{s}) - b}{2\sigma}\right).$$

De la même manière on déduit de l'inégalité (9) que

$$\eta_N < \frac{N}{2} + \sqrt{N}\left(\frac{log(\frac{K}{s}) - b}{2\sigma}\right) + 1,$$

ainsi,

$$\eta_N = \frac{N}{2} + \sqrt{N}\left(\frac{log(\frac{K}{s}) - b}{2\sigma}\right) + o(\sqrt{N}).$$

De plus, comme

$$q_N = \frac{e^{\frac{r}{N}} - d_N}{u_N - d_N}$$

on obtient par développement limité que

$$q_N = \frac{\frac{r-b}{N} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \frac{\sigma^2}{2N} + o(\frac{1}{N})}{\frac{2\sigma}{\sqrt{N}} + o(\frac{1}{\sqrt{N}})}$$

et donc

$$q_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{r-b}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o(\frac{1}{\sqrt{N}}).$$

De ce fait,

$$\eta_N - Nq_N = \sqrt{N}\left(\frac{log(\frac{K}{s}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma}\right) + \frac{\sigma\sqrt{N}}{2} + o(\sqrt{N}).$$

Comme

$$\sqrt{Nq_N(1-q_N)} = \frac{\sqrt{N}}{2}\sqrt{1 + o(\frac{1}{\sqrt{N}})},$$

$$\frac{\eta_N - Nq_N}{\sqrt{Nq_N(1-q_N)}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{log(\frac{K}{s}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma} + \sigma = -d_1 + \sigma. \square$$

En utilisant (7), le lemme 2.1 et le corollaire 2.2, on obtient

$$\mathcal{B}(N, q_N, \eta_N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1 - F(-d_1 + \sigma) = F(d_1 - \sigma)$$

où F est la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(0,1)$.

De la même manière, on montre que

$$\mathcal{B}(N, \frac{u_N q_N}{e^{\frac{r}{N}}}, \eta_N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} F(d_1).$$

Nous obtenons alors la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Dans le modèle C.R.R à N périodes, le prix du call européen $P^N(B)$, à l'instant $t = 0$, converge vers la limite*

$$P(B) = sF(d_1) - Ke^{-r}F(d_1 - \sigma) \tag{10}$$

où

$$d_1 = \frac{log(\frac{s}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}.$$

Remarque : La formule (10) est connue sous le nom de formule de Black-Scholes ([2], p. ? ? ? ?). Il est bon de voir quelle ne dépend ni de la probabilité *a priori* P ni du drift b. Elle nécessite uniquement la connaissance du paramètre de volatilité σ. Notons également que l'utilisation de la parité call-put (valable en A.O.A) nous fournit sans calculs le prix d'un put de strike K sur l'actif S^1.

En notant $\Phi_0^{1,N}$ la quantité d'actif risqué que doit contenir le portefeuille de réplication d'un call européen dans le modèle C.R.R N périodes, on obtient le résultat suivant dont la preuve est laissée en exercice. Il coincide également avec le résultat que l'on obtient en utilisant le modèle en temps continu de Black-Scholes.

Proposition 2.7

$$\Phi_0^{1,N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} F(d_1) = \frac{\partial P(B)}{\partial s}.$$

Remarque : Les résultats obtenus précédemment sont très naturels et soulignent l'intérêt du modèle C.R.R comme approximation du modèle en temps continu de Black-Scholes. En effet, les calculs dans C.R.R peuvent s'effectuer de manière purement algorithmique à l'aide d'une simple routine programmée sur ordinateur (formule (2)).

Références

[1] F. Black and M Scoles, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, **81** (1973), 637-654.

[2] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Sixth Edition, Prentice Hall, 2004.

[3] J. Jacod and P. Protter, *Probability essentials*, Springer, 2002.

[4] D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction to stochastic calculus applied to finance*, Translated from the 1991 French original by Nicolas Rabeau and Francois Mantion, Chapman & Hall, London, 1996.